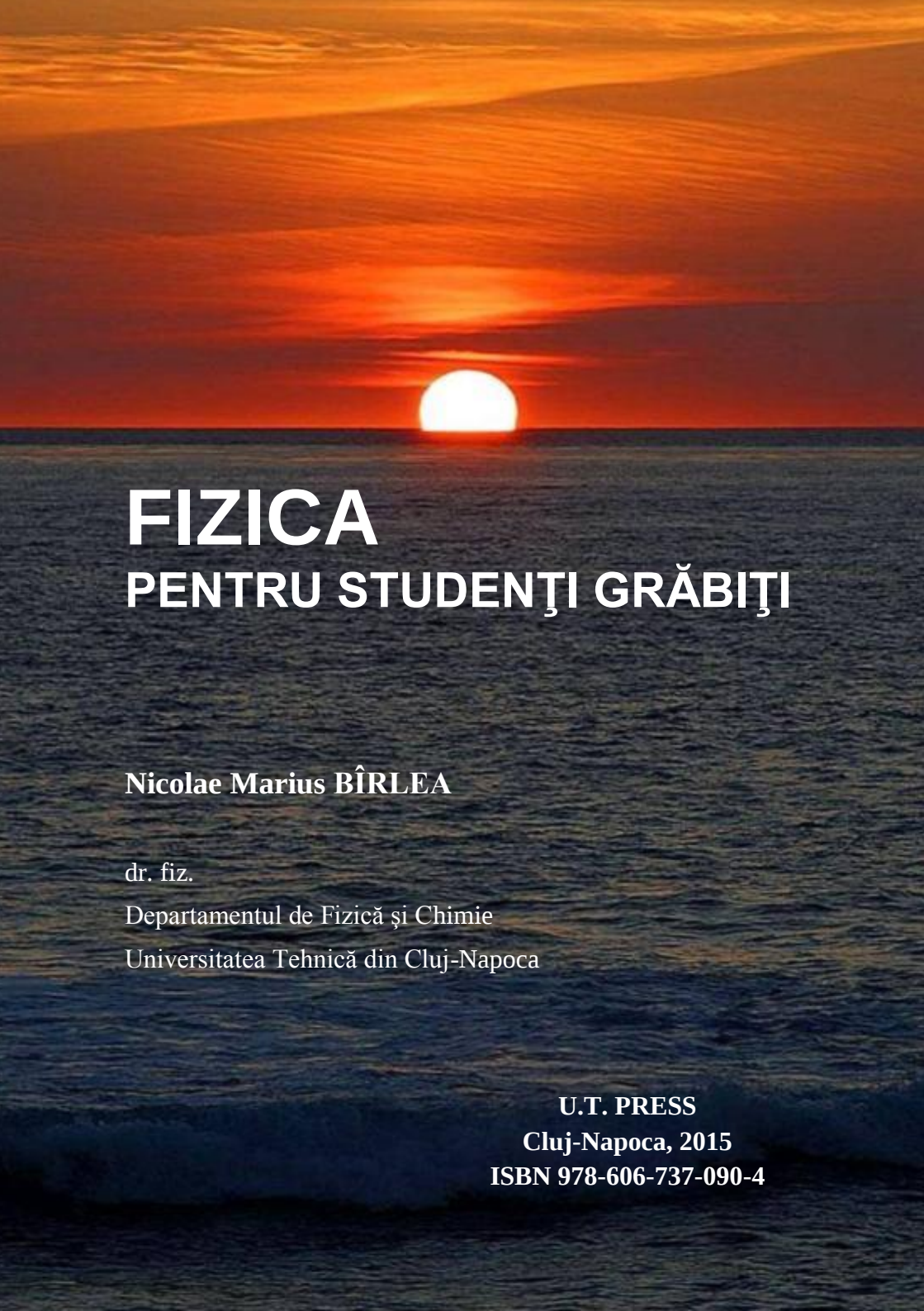




FIZICA PENTRU STUDENȚI GRĂBIȚI

Nicolae Marius BÎRLEA

dr. fiz.

Departamentul de Fizică și Chimie

Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

**U.T. PRESS
Cluj-Napoca, 2015
ISBN 978-606-737-090-4**



Editura U.T.PRESS

Str.Observatorului nr. 34

C.P.42, O.P. 2, 400775 Cluj-Napoca

Tel.:0264-401.999 / Fax: 0264 - 430.408

e-mail: utpress@biblio.utcluj.ro

www.utcluj.ro/editura

Director: Ing. Călin D. Câmpean

Copyright © 2015 Editura U.T.PRESS

Reproducerea integrală sau parțială a textului sau ilustrațiilor din această carte este posibilă numai cu acordul prealabil scris al editurii U.T.PRESS.

ISBN 978-606-737-090-4

Bun de tipar: 16.11.2015

În loc de introducere

*People see only what they are prepared to see.
Oamenii văd doar ceea ce sunt pregătiți să vadă.
Ralph Waldo Emerson, Journals (1863)*

Toți suntem marcați de progresul rapid din domeniul științei și tehnologiei. Zilnic trebuie să facem față la noi provocări pe care cadența ridicată a noilor produse de pe piață ne obligă. Fiindcă apelativul "inginer" implică cunoștințe tehnice mai multe decât ale celor fără acest apelativ, tu cel care tinzi către un astfel de titlu vei simți o presiune socială din partea celor apropiați care-ți vor cere să le spui: "Care-i mai bun?", "Ce să cumpăr...", "Ce crezi despre...", "Explică-mi de ce...", etc.

Dacă vrei un instrument care să-ți faciliteze **înțelegerea** lumii tehnice în care vrei să intri, atunci studiul Fizicii este punctul de plecare. Fizica este baza pe care se edifică diversele profesii ingineresti și oferă cunoștințele fundamentale cu care poți face judecăți de valoare asupra produselor, mașinilor, aparatelor, proceselor, serviciilor, etc.

În acest volum am plasat cunoștințele minime de "Mecanică" și "Căldură". Dat fiind timpul scurt acordat fizicii în programele ingineresti, am lăsat deoparte "Statica" și "Mișcarea solidului rigid" pentru a atinge cât mai multe noțiuni de fizică utile în aplicațiile specifice din inginerie.

De câte ori a fost posibil am ilustrat mecanismul fizic descris cu probleme de rezolvat. Consider capacitatea de a utiliza informația, academic vorbind "rezolvarea de probleme", mai importantă decât informația în sine. Cunoștințele sunt utile

atunci când ești capabil să le folosești. Johann Wolfgang von Goethe (scriitor german) o spune cel mai bine: "*Nu e destul să știi, trebuie să și aplici, nu e destul să vrei, trebuie să și faci.*"

Sigur că cei care vor ajunge cu studiul la stadiul de masterat sau doctorat vor simți lipsa noțiunilor de fizică din domeniul "Mecanicii Cuantice" sau a "Fizicii Statistice", dar acestea sunt subiecte prea avansate pentru a fi abordate înainte de a lămuri ce este "mecanica". Categorie că "nano" și "cuantic" vor fi (sau sunt?) cuvinte din conversația noastră zilnică. Iau ca exemplu tehnologia electronică comercială care acum (în 2015) este la nivel de 14 nm și se discută despre cea de 7 nm. Ține seama că diametrul unui atom este de circa 0.1 nm!

Suntem deja la limita unde mecanica clasică este înlocuită de cea cuantică, iar pentru cei care doresc sau sunt nevoiți să-și "updateze" cunoștințele de fizică le recomand tratatele de fizică generală din bibliografia de mai jos. În primul rând este cel al lui Halliday și Resnick, ce are și variante mai actuale în limba engleză (Halliday D, Resnick R, & Walker J. Fundamentals of Physics, John Wiley & Sons, 2014), este complet și la obiect cu multe probleme de rezolvat. Cele 3 volume cuprinzând lecțiile ținute de Feynman la CalTech sunt o conversație cu una dintre cele mai luminate minți ale secolului 20 din domeniul fizicii. O poți savura dacă ai ceva "baze" în domeniu.

Bibliografie

<http://www.phys.utcluj.ro/PersonalFile/Barlea.html>

Halliday D, Resnick R. Fizica, 2 vol. Ed. Did. Ped. 1975

Sears PW, Zemansky MW, Young HD, Fizica, Ed. Did. P 1983

R. Feynman, Fizica modernă, 3 vol. Ed. Tehnica, 1970.

CUPRINS

FIZICA PENTRU STUDENȚI GRĂBIȚI	0
În loc de introducere	1
Bibliografie	2
CUPRINS	3
MECANICA	8
CINEMATICA.....	9
Traectoria și Vectorul de Poziție.....	9
Viteza	10
Accelerația	11
Legături	12
Mișcarea circulară uniformă	14
Ecranul tactil - Touchscreen - poziția degetului	17
GPS - Global Positioning System	19
DINAMICA	21
Legile dinamicii (Newton).....	21
Mișcarea orizontală cu frecare. Sistemul ABS.	22
Forță de frânare proporțională cu viteza ($F_r = -kv$)	24
Forță de frânare proporțională cu pătratul vitezei (kv^2) ..	25
Mișcarea circulară în câmp gravitațional	28
Lucrul mecanic și Puterea	29
Energia	30

Scurtă istorie a energiei.....	33
Probleme de mecanică	34
OSCILAȚII	36
Oscilatorul armonic liber	37
Relațiile lui Euler	38
Oscilații proprii amortizate	40
Oscilatorul armonic forțat	42
UNDE.....	47
Cum se formează o undă.....	48
Ce viteză au undele în diverse medii elastice	50
Probleme	53
Caracteristici cinematice ale undei	53
Caracteristici dinamice ale undei	55
Exemple	56
Relații energetice.....	57
Experiment: Determinarea Vitezei Undelor Acustice	61
Dispozitivul Experimental	61
Prelucrarea datelor experimentale.....	63
Surse alternative de sunet.....	64
Ecranul inițial.....	65
Grafic	66
Microfonul cu electret.....	67
FLUIDE	68
Statica fluidelor.....	69

Formula barometrică	71
Legea lui Arhimede. Plutirea corpurilor	74
Balonul cu aer cald.....	76
Legea lui Pascal. Transmiterea presiunii	78
Distribuția Boltzmann (temă de nivel avansat).....	80
Dinamica fluidelor ideale.....	81
Ecuația de continuitate	81
Legea lui Bernoulli.....	81
O problemă utilă (în cât timp se atinge viteza limită).....	84
Probleme de mecanica fluidelor ideale	86
Măsurarea presiunii.....	88
Alte unități de presiune	89
Traductoare de presiune	89
Aplicații Industriale.....	92
Aplicații ale măsurării presiunii la automobile	92
FLUIDE VÂSCOASE	94
Curgerea Poiseuille	94
Legea lui Stokes	96
O problemă utilă (în cât timp se atinge viteza limită).....	98
Exemple numerice.....	99
Probleme de mecanica fluidelor vâskoase	101
ARIPA DE AVION	105
Explicație folosind presiunea dinamică.	105
Explicație folosind legea lui Bernoulli.....	107

Despre vârtejul din jurul aripii	108
Explicație folosind schimbarea direcției aerului.	110
Procesul care produce sustentația este unul singur.	111
Un cilindru rotitor generează portanță	112
Mărirea coeficientului de sustentatie	113
CĂLDURA ȘI TEMPERATURA	116
Măsurarea mecanică a temperaturii	119
Termometrul cu lichid.....	119
Termometrul cu bimetel.....	120
Termometrul cu gaz la volum constant.....	121
Măsurarea electrică a temperaturii.....	122
Termocuplul	122
Termorezistența din platină.....	127
Moduri de măsurare a temperaturii	129
Sisteme de încălzire cu acumulare de căldură	131
Scări termometrice și relațiile dintre ele	133
Fizicieni care au studiat în domeniul temperaturii:.....	136
CONDUCTIA CĂLDURII	138
Să vorbim în termeni practici despre căldură.....	142
Cum îți faci cafeaua? Capacitatea termică	143
Cum "curge" căldura. Stări staționare.....	143
Răspunsul la o schimbare bruscă de temperatură. Stări tranzitorii.....	146
Răspunsul unui termometru	147

Cum se împrăștie căldura. Încălzirea în volum.....	149
RADIAȚIA TERMICĂ	152
Radianța integrală. Legea lui Stefan și Boltzmann	152
Exemple	153
Spectrul radiației termice. Legea lui Wien.....	155
Distribuția radiației după lungimea de undă. Legea lui Planck.....	156
Exemple	160
TEORIA LUI MAX PLANCK (nivel avansat)	162
Probleme de radiație termică.....	172

MECANICA

Mecanica studiază mișcarea corpurilor și cauzele ce generează această mișcare. Fundamentul mecanicii clasice îl constituie legile lui Newton, care și astăzi sunt la fel de utile în aplicații ca și în 1687 când au fost enunțate.

Am lăsat deoparte "Statica" și "Mișcarea solidului rigid" ca să atingem mai multe noțiuni de fizică utile în aplicații ingineresti. Accentul este pus pe utilizarea cunoștințelor de mecanică la rezolvarea de probleme.

CINEMATICA

Cinematica este partea mecanicii care lucrează cu noțiunile de *spațiu* și *timp*, și cu derivatele lor *viteză* și *acelerație*. Ea practic studiază geometria mișcării.

Traectoria și Vectorul de Poziție

Mișcarea unui punct material este determinată atunci când poziția lui este cunoscută în funcție de timp. Prin mișcarea sa punctul material P descrie o curbă ce constituie **traectoria** mobilului. Dacă poziția punctului material este determinată față de un punct fix O (în general locul unde se află observatorul) mărimea fizică implicată este **vectorul de poziție**, $\mathbf{r}(t)$, un vector cu originea în punctul O și vârful în P unde se găsește mobilul la momentul respectiv. Dacă atașăm punctului O un sistem de coordonate Oxyz, *ortogonal*, atunci putem exprima vectorul de poziție sub forma:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} \cdot x(t) + \mathbf{j} \cdot y(t) + \mathbf{k} \cdot z(t) \quad (1)$$

unde coordonatele punctului material sunt funcții de timp, iar $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ sunt versorii (vectorii unitate) ai celor 3 axe de coordonate.

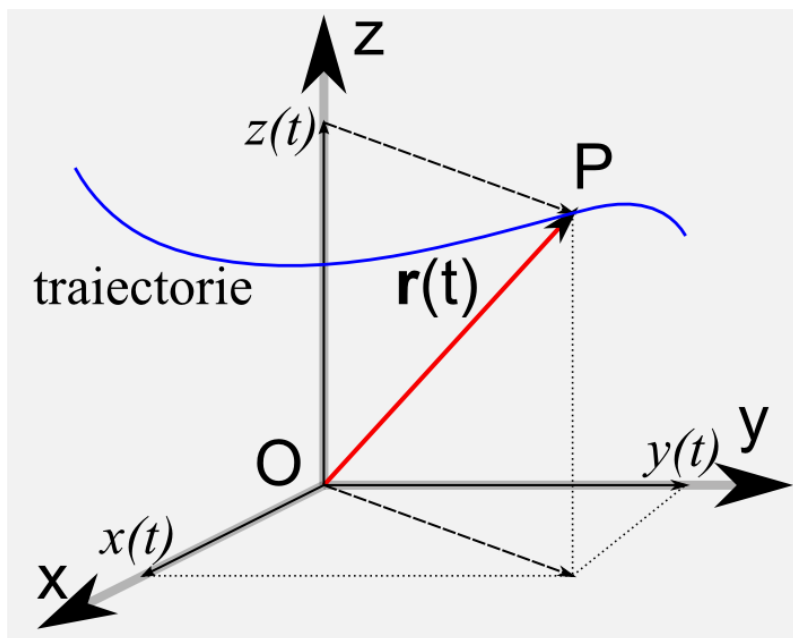
Coordonatele punctului material pot fi aflate ca produs scalar între vectorul de poziție $\mathbf{r}(t)$ și versorii axelor:

$$x(t) = \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{i}, \quad y(t) = \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{j}, \quad z(t) = \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{k},$$

ținând cont de definiția produsului scalar a doi vectori:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

unde $\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ este cosinusul unghiului dintre cei doi vectori $\mathbf{a}$ și $\mathbf{b}$, iar $|\mathbf{a}|$ și $|\mathbf{b}|$ sunt modulele vectorilor $\mathbf{a}$ și $\mathbf{b}$. Fiindcă $\cos(\pi/2)=0$, produsele $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j}$, $\mathbf{j} \cdot \mathbf{k}$ și $\mathbf{k} \cdot \mathbf{i}$ sunt nule, iar produsele $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}$, $\mathbf{j} \cdot \mathbf{j}$ și $\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}$ sunt egale cu 1 fiindcă $\cos 0=1$.



Traectoria, vectorul de poziție $\mathbf{r}(t)$
și sistemul de coordonate ortogonal.

Viteza

Viteza mobilului, definită ca raportul între spațiul parcurs și intervalul de timp în care a fost parcurs acest spațiu, devine la limita unui interval de timp infinit mic, derivata razei vectoriale funcție de timp:

$$\mathbf{v}(t) = d\mathbf{r}/dt = \mathbf{i} \cdot v_x + \mathbf{j} \cdot v_y + \mathbf{k} \cdot v_z \quad [v]_{SI} = \text{m/s} \quad (2)$$

Cunoscând componentele vitezei într-un sistem de coordonate rectangular putem calcula modulul vitezei după relația:

$$|\mathbf{v}| = (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)^{1/2} \quad (3)$$

datorită faptului că vectorul respectiv este diagonală în paralelipipedul format de cele trei componente.

Accelerația

Se poate defini **accelerația** mobilului ca raport între variația vitezei și intervalul de timp în care a avut loc această variație. Ca accelerație instantanee, ea este derivata vitezei funcție de timp:

$$\mathbf{a}(t) = d\mathbf{v}/dt \quad [\mathbf{a}]_{SI} = \text{m/s}^2 \quad (4)$$

Dacă scriem viteza ca un produs între modulul său și versorul vitezei **b** atunci accelerația va fi:

$$\mathbf{a} = d(\mathbf{v} \cdot \mathbf{b})/dt = \mathbf{b} \cdot d\mathbf{v}/dt + \mathbf{v} \cdot d\mathbf{b}/dt \quad (5)$$

Primul termen reprezintă accelerația datorată modificării vitezei ca valoare, iar al doilea termen este accelerația datorată modificării direcției vitezei. Ținând cont că **b** este un vector unitate, adică:

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = b^2 = 1 \quad (6)$$

derivând expresia (6) avem:

$$\mathbf{b} \cdot d\mathbf{b}/dt = 0 \quad (7)$$

ceea ce ne spune că vectorul $d\mathbf{b}/dt$ este perpendicular pe vectorul **b**. El va putea fi scris ca:

$$d\mathbf{b}/dt = \mathbf{c} \cdot d\mathbf{b}/dt \quad (8)$$

unde **c** este versorul direcției perpendiculare pe direcția lui **b**. Ținând cont că:

$$d\mathbf{b} = |\mathbf{b}| \cdot d\alpha = d\alpha \quad (9)$$

unde α este unghiul cu care se rotește **b**, atunci spațiul parcurs este:

$$ds = R \cdot d\alpha \quad (10)$$

unde R este *raza de curbură a traiectoriei*. De aici găsim că:

$$db/dt = d\alpha/dt = (1/R) \cdot (ds/dt) = v/R \quad (11)$$

iar relația (5) devine:

$$\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt = \mathbf{b} \cdot d\mathbf{v}/dt + \mathbf{c} \cdot v^2/R \quad (12)$$

unde primul termen este accelerația tangențială, iar al doilea termen este accelerația normală (perpendiculară pe direcția de mers).

Legături

Cunoscând accelerația unui corp, prin integrare funcție de timp a acesteia obținem viteza corpului:

$$\mathbf{v}(t) = \int \mathbf{a} \cdot dt \quad (13)$$

Pentru *mișcarea uniform variată* (accelerație constantă $\mathbf{a}$) avem de exemplu:

$$v(t) = at + v_0,$$

unde v_0 este viteza inițială a corpului (la $t=0s$).

Cunoscând viteza unui corp putem determina legea spațiului (legea sa de mișcare) prin integrarea vitezei după timp:

$$\mathbf{s}(t) = \int \mathbf{v} \cdot dt \quad (14)$$

De exemplu pentru *mișcarea uniformă* (viteza este constantă) avem:

$$s(t) = vt + s_0,$$

unde s_0 este spațiul inițial (poziția corpului la momentul $t=0$).

La *mișcarea uniform variată* (accelerație constantă $\mathbf{a}$), integrând după timp legea vitezei deja determinată, după avem următoarea lege a spațiului:

$$s(t) = at^2/2 + v_0t + s_0.$$

Scoțând timpul din legea vitezei:

$$t = (v - v_0)/a$$

și înlocuindu-l în legea spațiului:

$$s = a(v - v_0)^2 / (2a^2) + v_0(v - v_0)/a + s_0.$$

obținem o legătură directă între poziția corpului și viteza sa, independentă de timp, *legea lui Galilei*:

$$v^2 = v_0^2 + 2a(s - s_0)$$

Exemple

Cea mai mare viteză cunoscută este viteza luminii $c = 3 \cdot 10^8$ m/s (300'000 km/s). Știind distanța de la Pământ la Lună $d_{\text{Lună-Pământ}} = 384'400$ km $= 3,844 \cdot 10^8$ m, să se afle în cât timp ajunge la Lună un semnal luminos emis de pe Pământ.

$$t_{\text{Lună-Pământ}} = d_{\text{Lună-Pământ}}/c = 1,281 \text{ s}$$

Știind distanța de la Pământ la Soare $d_{\text{Pământ-Soare}} = 1,49597 \cdot 10^8$ km $\approx 1,5 \cdot 10^{11}$ m, putem afla după cât timp fotonul emis de Soare ajunge pe Pământ:

$$t_{\text{Soare -Pământ}} = d_{\text{Pământ-Soare}}/c = 500 \text{ s} = 8,3 \text{ min.}$$

Alte date astronomice:

$$\text{raza Lunii} \quad R_L = 1.738 \times 10^3 \text{ km}$$

$$\text{raza Pământului} \quad R_P = 6380 \text{ km} = 6.38 \times 10^6 \text{ m}$$

$$\text{raza Soarelui} \quad R_S = 695,508 \text{ km} = 6,955 \times 10^8 \text{ m}$$

Timpul de reacție și frânarea

Un automobilul cu viteza $v = 72$ km/h trebuie frânat datorită unui eveniment de pe șosea. Află **spațiul parcurs până la începerea frânării**, știind timpul de reacție al șoferului: 0.2 s.

$$R: 72 \text{ km/h} = 72000 \text{ m} / 3600 \text{ s} = 20 \text{ m/s} [72/3.6]$$

$$s = vt = 20 \cdot 0.2 = 4 \text{ m}$$

Cunoscând **timpul de reacție** al unui om, $\sim 0.2\text{s}$, putem afla ce spațiu parcurge un obiect în cădere liberă ($g = 9,81\text{m/s}^2$, $v_0 = 0 \text{ m/s}$) în acest timp:

$$s = gt^2/2 = 9,81 \cdot 0,04/2 = 0,196 \text{ m.}$$

Aruncări oblice (descompunerea mișcării)

Viteza și unghiul aruncării oblice pentru a atinge $h_{\max} = 10\text{m}$ la $x = 10\text{m}$ de origine.

Din legea Galilei

$$v_{0y} = (2g h_{\max})^{1/2} = 14,1 \text{ m/s,}$$

$$t_u = v_{0y}/g = 1.41\text{s,}$$

$$v_{0x} = x/t_u = 10/1.41 = 7.09 \text{ m/s,}$$

$$v = (v_{0x}^2 + v_{0y}^2)^{1/2} = 15.8 \text{ m/s,}$$

$$\text{tg}\alpha = v_{0y}/v_{0x} = 1.99 [63.3^\circ]$$

Mișcarea circulară uniformă

Mișcarea circulară uniformă se caracterizează prin:

1. traiectoria corpului este un cerc (corpul este mereu la aceeași distanță față de un punct O, centrul cercului, uzual ales ca origine a sistemului de coordonate);
2. corpul parcurge spații egale în intervale de timp egale (are o viteză constantă în modul), respectiv unghiurile măsurate de raza vectoare în intervale de timp egale sunt egale (are o viteză unghiulară constantă).

Noțiunile de bază cu care se lucrează sunt:

1. **perioada**, T, măsurată în secunde: timpul necesar corpului pentru a parcurge circumferința cercului ($2\pi R$);

2. **frecvența**, f sau ν (litera grecească "niu"), măsurată în Hertz-i ($\text{Hz}=1/\text{secundă}$): numărul de rotații efectuate în unitatea de timp;
3. **viteza unghiulară**, ω (litera grecească "omega"), măsurată în radiani/secundă: unghiul parcurs în unitatea de timp (vector perpendicular pe planul cercului).

Relațiile dintre mărimi sunt:

$$f = 1/T$$

$$\omega = d\alpha/dt = 2\pi/T = 2\pi f, \quad \Rightarrow \quad \alpha = \omega t$$

$$\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}. \quad (v = R d\alpha/dt = R\omega)$$

Produsul vectorial dintre viteza unghiulară (perpendiculară pe planul cercului) și vectorul de poziție (cu punctul de aplicație în centrul cercului) ne dă vectorul vitezei.

Produsul vectorial a doi vectori $\mathbf{a}$ și $\mathbf{b}$ este un vector $\mathbf{c}$, care are *modulul* dat de relația:

$$c = ab \sin(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

unde $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ este unghiul dintre vectori, *direcția* lui $\mathbf{c}$ este perpendiculară pe planul format de vectorii $\mathbf{a}$ și $\mathbf{b}$, iar *sensul* este dat regula șurubului drept: rotind primul vector peste cel de-al doilea, pe drumul cel mai scurt, obținem sensul de deplasare.

Viteza corpului pe traiectoria circulară este constantă în modul, dar se modifică ca direcție și din această cauză corpul suferă o accelerație $\mathbf{a}$:

$$\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}). \quad (\mathbf{a} = \omega^2 \mathbf{R})$$

Accelerația e perpendiculară pe viteza, având aceeași direcție cu raza, dar sensul către centrul cercului și de aceea se numește **accelerație centripetă**.

Pornind de la coordonatele corpului:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j},$$

unde: $x = R \cdot \cos(\omega t),$

$y = R \cdot \sin(\omega t),$

prin derivare obținem viteza:

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j},$$

unde:

$$v_x = -\omega R \cdot \sin(\omega t),$$

$$v_y = \omega R \cdot \cos(\omega t),$$

care derivată după timp ne dă accelerația:

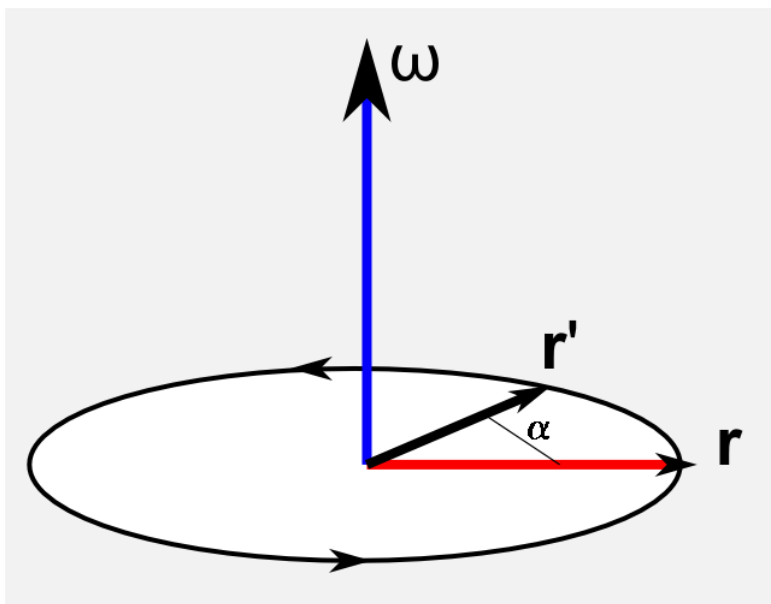
$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j},$$

unde:

$$a_x = -\omega^2 R \cdot \cos(\omega t),$$

$$a_y = -\omega^2 R \cdot \sin(\omega t).$$

Fiindcă produsul scalar a doi vectori perpendiculari este zero, se poate arăta prin calcul direct că $\mathbf{v} \perp \mathbf{r}$. și $\mathbf{a} \perp \mathbf{v}$, deci $\mathbf{a} \parallel \mathbf{r}$.



Elementele mișcării circulare

Exemple

Calculează **viteza suprafeței Pământului**. Raza pământului este:

$$R_p = 6380 \text{ km} = 6.38 \times 10^6 \text{ m}$$

Perioada de rotație în jurul propriei axe este:

$$T = 24\text{h} = 24\text{h} \times 60\text{min/h} \times 60\text{sec/min} = 86,4 \cdot 10^3\text{s},$$

Viteza unui corp aflat pe suprafața Pământului (la Ecuator) va fi:

$$\begin{aligned} v &= 2\pi R/T = 2 \cdot 3.14 \cdot 6,4 \cdot 10^6 / 86,4 \cdot 10^3 = 0.4652 \cdot 10^3 = \\ &= 465 \text{ m/s} = 1675 \text{ km/h} \end{aligned}$$

Calculați aceeași viteză pentru latitudinea de 45° . (Ține seama de modificarea razei!)

Accelerația centripetă va fi neglijabilă față de accelerația gravitațională:

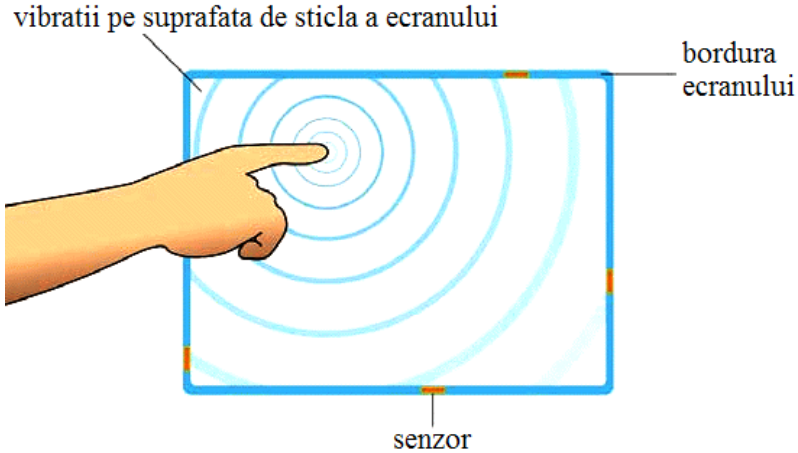
$$a = \omega v = 2\pi v/T = 6.28 \cdot 465 / 86,4 \cdot 10^3 = 33.8 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2.$$

În mod similar putem calcula **viteza Pământului în jurul Soarelui**, știind distanța Soare-Pământ $R_{SP} = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$, și perioada de rotație $T = 1 \text{ an} = 365 \times 86,4 \cdot 10^3 \text{ s} = 31'536 \times 10^3 \text{ s} = 3,15 \times 10^7 \text{ s}$:

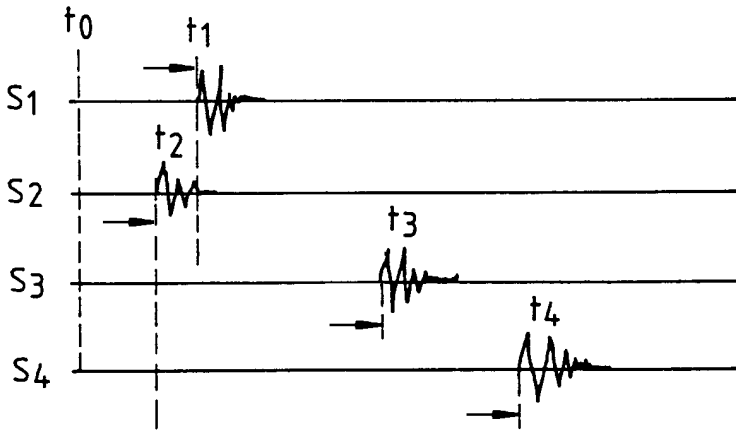
$$v = 2\pi R_{SP}/T = 3 \cdot 10^4 \text{ m/s} = 1,08 \cdot 10^5 \text{ km/h} = 108'000 \text{ km/h}$$

Ecranul tactil - Touchscreen - poziția degetului

O modalitate de a afla poziția degetului pe un ecran tactil este prin intermediul undelor generate pe suprafața de sticlă de atingerea degetului (Acoustic Pulse Recognition Touchscreen)



Ecran tactil cu recunoaștere de puls acustic.



Semnalele de la senzori

Știm:

poziția senzorilor: $(0,0)$ $(L,0)$ $(0,L)$,
 timpul t_i când vibrația ajunge la senzorul i ,
 viteza de propagare a vibrației prin sticlă $v = 4'300$ m/s.

Nu știm momentul t_0 când degetul atinge ecranul și nici poziția degetului $\mathbf{R}=(x,y)$.

Distanța dintre poziția degetului și poziția senzorilor se poate exprima ca o diferență între vectorii de poziție corespunzători:

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{R} - \mathbf{R}_{s_i}$$

Pe această distanță se propagă pulsul acustic cu viteza v :

$$R_i = v(t_i - t_0)$$

Putem combina cele două tipuri de informație într-un singur set de ecuații. Explicit:

$$\begin{aligned} R_1^2 &= x^2 + y^2 &= v^2 (t_1 - t_0)^2 \\ R_2^2 &= (L - x)^2 + y^2 &= v^2 (t_2 - t_0)^2 \\ R_3^2 &= x^2 + (L - y)^2 &= v^2 (t_3 - t_0)^2 \end{aligned}$$

Avem un sistem de 3 ecuații cu 3 necunoscute t_0 , x , y ! [mate!]
Deci pentru a determina poziția pe suprafața ecranului sunt necesari doar 3 senzori.

Senzorii multipli (linie de senzori pe Ox și pe Oy) ar simplifica matematica aflării poziției degetului. Dacă doi senzori de pe direcția Ox primesc semnalul în același timp $t_1 = t_2$, atunci atingerea e pe mediatoarea segmentului 1-2:

$$x = (x_1 + x_2) / 2$$

GPS - Global Positioning System

În sistemul de poziționare globală (GPS) peste 20 de sateliți aflați la $h=20'000\text{km}$ de suprafața Pământului, transmit poziția în sistemul de referință dat și timpul (cu eroare $\Delta t = \pm 10\text{ns}$!). Receptorul GPS de pe mașina ta recepționează semnalele și își calculează poziția. Ideea de bază se bazează pe faptul că tu recepționezi semnalele cu o întârziere dată de timpul necesar unei electromagnetice să parcurgă distanța dintre satelit și locul unde te afli. Concret:

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i| = c(t - t_i), \quad \Rightarrow \mathbf{r}, t.$$

unde $\mathbf{r}$ este vectorul tău de poziție și $\mathbf{r}_i$ este vectorul de poziție al satelitului i , iar t este momentul recepționării semnalului și t_i este momentul emiterii semnalului. Explicitând coordonatele se obține un sistem de 4 ecuații cu 4 necunoscute (x, y, z, t) :

$$[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2]^{1/2} = c(t - t_i) \quad i=1, \dots, 4$$

adică sunt necesari 4 sateliți pentru a determina un punct de pe suprafața Pământului.

DINAMICA

Dinamica studiază cauzele mișcării, iar noțiunile ei de bază sunt forța, lucrul mecanic, energia. La baza dinamicii stau cele 4 legi ale dinamicii, care descriu comportarea corpurilor într-un sistem de referință inerțial.

Legile dinamicii (Newton)

Prima lege a mecanicii sau legea inerției

"Un punct material este în repaus sau se mișcă pe o traiectorie rectilinie cu viteză constantă dacă asupra sa nu acționează alte corpuri din exterior." Sistemele de referință în care se verifică această afirmație se numesc sisteme de referință inerțiale.

Această lege se poate enunța cu ajutorul noțiunii de impuls în felul următor: "În absența oricărei forțe, impulsul corpului rămâne constant". Legea inerției este deci o lege de conservare a impulsului.

Impulsul unui corp este produsul dintre masa și viteza sa:

$$\mathbf{p} = m \cdot \mathbf{v} \qquad [\mathbf{p}]_{\text{SI}} = \text{kg} \cdot \text{m/s} \qquad (15)$$

A doua lege a mecanicii sau legea forței:

"Derivata impulsului în raport cu timpul este egală cu forța ce acționează asupra corpului."

$$\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt \qquad [\mathbf{F}]_{\text{SI}} = \text{kg} \cdot \text{m/s}^2 = \text{N (Newton)} \qquad (16)$$

Când masa e constantă ca funcție de viteză (mecanica clasică) atunci (16) devine:

$$\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a} \qquad (17)$$

Astfel a doua lege a dinamicii, **legea lui Newton**, devine:

"O forță acționând asupra unui corp îi imprimă o accelerație

direct proporțională cu forța și invers proporțională cu masa acestuia."

A treia lege a mecanicii sau legea acțiunii și reacțiunii

"Forța cu care acționează un corp A asupra corpului B este egală în modul și de sens contrar forței cu care acționează corpul B asupra corpului A."

A patra lege a mecanicii sau legea superpoziției forțelor

"Fiecare din forțele aplicate asupra unui corp acționează independent de existența celorlalte forțe."

O consecință importantă a acestei legi este că putem studia mișcarea corpului ca și cum asupra sa ar acționa o singură forță, forța rezultată prin compunerea tuturor forțelor ce acționează asupra corpului.

Mișcarea orizontală cu frecare. Sistemul ABS.

Un corp cu masa $m=1000$ kg se mișcă pe o suprafață orizontală cu coeficientul de frecare $\mu=0,1$ și are viteza inițială de $v_0 = 72\text{km/h}$ (20m/s). Știind accelerația gravitațională, $g=9,81$ m/s^2 , aflați accelerația corpului și spațiul parcurs până la oprire.

Corpul prin greutatea sa $G=mg$ acționează asupra suprafeței pe care se mișcă, iar aceasta reacționează cu o forță egală în modul, dar de sens contrar (L3 a acțiunii și reacțiunii):

$$N=G=mg \quad (N=-G \text{ pe suprafața de sprijin})$$

Din această cauză pe direcția verticală suma forțelor care acționează asupra corpului este zero ($N+G=0$) și implicit accelerația pe această direcție va fi zero (L2 a forței).

Pe direcția orizontală va acționa doar forța de frânare în sens opus deplasării (vitezei):

$$F_r = \mu N = \mu mg$$

Atunci putem calcula accelerația corpului din legea a doua a dinamicii:

$$a = \sum F/m = \mu mg/m = \mu g$$

Putem acum să scriem legea vitezei și a spațiului:

$$v(t) = v_0 - \mu g t \quad s(t) = v_0 t - \mu g t^2 / 2$$

și apoi să calculăm timpul până la oprire:

$$v=0 \Rightarrow v_0 - \mu g t = 0 \Rightarrow t_0 = v_0 / (\mu g)$$

și spațiul parcurs până la oprire:

$$s(t_0) = s_0 = v_0^2 / (2 \mu g)$$

Sistemul ABS - Antilock Braking Systems

Aceste relații sunt utile în studiul sistemului de frânare de la automobile ABS-Antilock Braking Systems. Sistemul se bazează pe diferența dintre coeficienții de frecare statici (fără alunecare) și cei cinetici (cu alunecare).

În cazul automobilelor, suprafețele în contact sunt cauciucul anvelopelor și betonul șoselei. Coeficientul de frecare static este $\mu_s = 1$, iar cel cinematic este $\mu_c = \mu_s - 0.2 = 0.8$. Dacă la frânare roțile nu alunecă atunci spațiul de frânare este:

$$s' = v_0^2 / (2 \mu_s g) \approx 20^2 / (2 \cdot 1 \cdot 10) = 20 \text{ m}$$

($v_0 = 72 \text{ km/h} = 20 \text{ m/s}$)

Dacă la frânare roțile alunecă atunci spațiul de frânare este:

$$s'' = v_0^2 / (2 \mu_c g) \approx 20^2 / (2 \cdot 0.8 \cdot 10) = 25 \text{ m}$$

($v_0 = 72 \text{ km/h} = 20 \text{ m/s}$)

Folosind sistemul ABS se scurtează cu $s'' - s' = 5 \text{ m}$ spațiul de frânare, la viteza de 72 km/h . Dacă viteza inițială se dublează ($v_0 = 144 \text{ km/h}$), atunci spațiile de frânare cresc de 4 ori ($\sim v_0^2$), și scurtarea spațiului de frânare crește de 4 ori ($s'' - s' = 20 \text{ m}$)!

Tabel pentru coeficienții de frecare statici (μ_s) și cinetici (μ_c)

Suprafețe în contact	μ_s	μ_c
Metal pe metal (lubrifiat)	0.15	0.06
Oțel pe oțel	0.74	0.57
Cauciuc pe beton uscat	1.0 (0.9)	0.8 (0.7)
Sticlă pe sticlă	0.94	0.4
Teflon pe teflon	0.04	0.04
Grafit pe grafit	-	0.1
Os pe os (uscat)	-	0.3
Articulații umane (lubrificate)	0.01	0.003

Forță de frânare proporțională cu viteza ($F_r = -kv$)

Un corp este acționat de o forță constantă (forța de greutate) $G=mg$ și o forță de frânare $F_r = kv$ proporțională cu viteza. Găsiți legea vitezei și a spațiului.

Aplicăm legea forței:

$$ma = mg - kv \Rightarrow dv/dt = g - v \cdot k/m = (k/m)[(mg/k) - v]$$

Separăm variabilele "v" și "t" și integrăm:

$$\int dv/[(mg/k) - v] = \int (k/m) dt$$

$$\Rightarrow -\ln[(mg/k) - v] + \ln C = (k/m) \cdot t$$

Punând condiția inițială $v = 0$ la $t = 0$, avem $\ln C = \ln(mg/k)$ de unde:

$$\ln\{[(mg/k) - v]/(mg/k)\} = -t(k/m)$$

sau exponențiind avem:

$$[(mg/k) - v]/(mg/k) = e^{-t k/m} \quad v(t) = (mg/k)(1 - e^{-t k/m})$$

Notând $v' = mg/k$ și $\tau = m/k$ relația vitezei devine:

$$v(t) = v' \cdot (1 - e^{-t/\tau})$$

Știind că:

$$e^{-1} = 0,3678; 1 - e^{-1} = 0,632 = 63\%$$

$$e^{-2} = 0,135; 1 - e^{-2} = 0,864 = 86\%$$

$$e^{-3} = 0,0498; 1 - e^{-3} = 0,950 = 95\%$$

$$e^{-4} = 0,018; 1 - e^{-4} = 0,982 = 98\%$$

tragem concluzia că după 3 constante de timp τ , mobilul atinge practic viteza sa limită v' , mișcându-se în continuare uniform.

Frânarea proporțională cu viteza este caracteristică mișcării corpurilor cu viteză mică în fluide vâscoase. Forța de frânare a unei sfere de rază r și densitate ρ , care se mișcă cu viteza v , într-un fluid de densitate ρ' și coeficient de vâscozitate η ($[\eta]_{SI} = \text{kg}/(\text{s} \cdot \text{m})$) este:

$$f = 6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r \cdot v \quad (\text{legea lui Stokes})$$

La limită, când sfera se mișcă uniform sub acțiunea forței de greutate, a forței arhimedice orientată în sens contrar greutateii și a forței de frânare, avem egalitatea:

$$6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r \cdot v' = (4/3) \cdot \pi \cdot r^3 \cdot g \cdot (\rho - \rho')$$

din care putem deduce coeficientul de vâscozitate măsurând viteza limită v' .

Forță de frânare proporțională cu pătratul vitezei (kv^2)

Un corp este acționat de o forță constantă (forța de greutate) $G = mg$ și o forță de frânare $F_r = kv^2$ proporțională cu pătratul vitezei. Găsiți legea vitezei și a spațiului.

Aplicăm legea forței:

$$ma = mg - kv^2 \quad \Rightarrow \quad a \cdot (m/k) = (mg/k) - v^2$$

Notăm viteza maximă a corpului când $a=0$ cu v' :

$$mg/k = v'^2,$$

de unde:

$$(dv/dt) (m/k) = v'^2 - v^2 = (v' - v)(v' + v)$$

Separăm variabilele v și t :

$$\Rightarrow \quad dv/[(v' - v)(v' + v)] = (k/m) \cdot dt$$

și ținând cont că:

$$1/[(v' - v)(v' + v)] = (1/2v') [1/(v' - v) + 1/(v' + v)]$$

putem scrie că:

$$dv/(v' - v) + dv/(v' + v) = dt (2v'k/m)$$

Notăm cu τ *constantă de timp* caracteristică mișcării:

$$\tau = m/(2v'k) = (1/2) \cdot [m/(k \cdot g)]^{1/2}$$

avem:

$$\int dv/(v' - v) + \int dv/(v' + v) = \int dt / \tau$$

După integrare cu condiția inițială $v = 0$ la $t = 0$, avem:

$$\ln[(v' + v)/(v' - v)] = t/\tau$$

de unde exponențiind avem: $\Rightarrow \quad (v' + v)/(v' - v) = e^{t/\tau}$

Rearanjând obținem: $\Rightarrow \quad v(t) = v' (e^{t/\tau} - 1)/(e^{t/\tau} + 1)$

sau după amplificare cu $e^{-t/\tau} \Rightarrow v(t) = v' \cdot (1 - e^{-t/\tau})/(1 + e^{-t/\tau})$

Această relație pentru viteză este destul de similară cu cea de la problema anterioară, implicit comportarea mobilului va avea similitudini cu mișcarea sub acțiunea frânării proporționale cu viteza.

Știind că:

$$e^{-1} = 0,368 ; 1 - e^{-1} = 0,632 = 63\% ; 1 + e^{-1} = 1,3678$$

$$e^{-2} = 0,135 ; 1 - e^{-2} = 0,864 = 86\% ; 1 + e^{-2} = 1,135$$

$$e^{-3} = 0,049 ; 1 - e^{-3} = 0,950 = 95\% ; 1 + e^{-3} = 1,049$$

$$e^{-4} = 0,018 ; 1 - e^{-4} = 0,982 = 98\% ; 1 + e^{-4} = 1,018$$

similar cu problema precedentă tragem concluzia că după 3 constante de timp τ , mobilul atinge practic viteza sa limită v' , mișcându-se în continuare uniform.

Această forță de frânare este caracteristică mișcării obiectelor cu viteză mare într-un fluid, de exemplu autovehiculele în aer și avioanele. Presiunea dinamică ce acționează asupra secțiunii mobilului, transversale pe direcția de curgere a fluidului:

$$p_{\text{din}} = \rho \cdot v^2 / 2$$

unde: ρ –densitatea fluidului, $1,29 \text{ kg/m}^3$ pentru aer la 0°C ,
 v –viteza relativă fluid-solid,

crează forța de frânare:

$$F_r = K \cdot S \cdot \rho \cdot v^2 / 2$$

unde S este secțiunea mobilului *transversală* (perpendiculară) pe direcția de curgere, iar K este *coeficientul aerodinamic* ce depinde de forma obiectului:

$K = 1,2$	$\Rightarrow)$	semisferă concavă
$K = 1$	$\Rightarrow $	plan
$K = 0,4$	$\Rightarrow O$	sferă
$K = 0,3$	$\Rightarrow ($	semisferă convexă
$K = 0,2$	$\Rightarrow <>$	"glonț"
$K = 0,04$	$\Rightarrow \subset$	"picătură", profil aripă de avion

Mișcarea circulară în câmp gravitațional

Forța care menține corpul pe o traiectorie circulară este:

$$F = m a_{cp} = m v^2/r$$

Un sistem de referință legat de corpul care se mișcă uniform pe o traiectorie circulară este un *sistem de referință neinertial*.

Adică asupra unui corp de masă m acționează *forța de inerție* " $m \cdot a_{cf}$ ", unde a_{cf} este accelerația centrifugă, egală în modul dar de sens contrar cu accelerația centripetă:

$$a_{cf} = a_{cp} = \omega^2 r = v^2/r$$

În sistemul *neinertial* propriu corpului acesta este în echilibru, fiindcă asupra sa acționează *forța centripetă* ce este echilibrată de *forța centrifugă*. Forța centripetă are un suport fizic, este tensiunea din fir (piatră pe care o rotim) sau forța gravitațională (satelit în jurul Pământului) sau forța coulombiană (electron rotindu-se în jurul nucleului). Forța centrifugă se manifestă doar în sistemul de referință neinertial.

Viteza și altitudinea unui satelit geostaționar.

În cazul unui satelit care gravitează în jurul Pământului se echilibrează forța de atracție gravitațională:

$$F = KMm/r^2.$$

unde:

$K = 6.674 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$. [$\text{m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$] constanta gravitațională

$M_p = 5.98 \times 10^{24} \text{ kg}$ masa Pământului

r = poziția satelitului față de centrul Pământului

m = masa satelitului.

cu forța centrifugă (inerțială)

$$F_{cf} = mv^2/r = m\omega^2 r = m(2\pi/T)^2 r$$

T fiind perioada mișcării (timpul necesar unei rotații complete), care pentru un satelit geostaționar este $T=24\text{h}$.

$$KMm/r^2 = m(2\pi/T)^2 r \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} r &= [KMT^2/(4\pi^2)]^{1/3} = \\ &= 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot 8,64^2 \cdot 10^8 / (39,4)]^{1/3} = \\ &= [75,75 \cdot 10^{21}]^{1/3} \Rightarrow \\ r &= 4,2312 \cdot 10^7 \text{ m} \end{aligned}$$

Față de suprafața Pământului, poziția satelitului geostaționar va fi:

$$H = r - R_p = 42,312 \cdot 10^6 - 6,38 \cdot 10^6 \text{ m} = 35,93 \cdot 10^6 \text{ m} = 35'930 \text{ km}$$

Aflați perioda de revoluție și viteza unui satelit care gravitează la 100 km deasupra suprafeței Pământului.

Lucrul mecanic și Puterea

Lucrul mecanic elementar este produsul scalar între forță și deplasarea elementară a punctului de aplicație a forței:

$$dL = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F \cdot ds \cdot \cos\alpha \quad [L]_{SI} = N \cdot m = J \quad (18)$$

Unitatea de măsură pentru lucrul mecanic este Joule-ul, J.

Lucrul mecanic total este integrala forței pe traiectoria descrisă de punctul material :

$$L = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad (19)$$

Puterea e raportul dintre lucrul mecanic efectuat și intervalul de timp în care a fost efectuat. La limita intervalelor de timp foarte mici puterea instantanee este derivata lucrului mecanic:

$$P = dL/dt \quad [P]_{SI} = J/s = W \quad (20)$$

Unitatea de măsură pentru putere este Watt-ul, W.

Ținând cont că: $dL = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, putem rescrie relația (20) pentru putere ca:

$$P = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}/dt = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}.$$

o relație extrem de utilă în multe aplicații. Această expresie ne spune că forța de tracțiune generată de motorul unui automobil este invers proporțională cu viteza instantanee a automobilului. Cu alte cuvinte capacitatea de a accelera a automobilului scade puternic la viteze mari!

Energia

Energia cinetică

Folosindu-ne de relația (18) pentru lucrul mecanic elementar și de legea forței (17) putem scrie:

$$\begin{aligned} dL &= \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = m \cdot (dv/dt) \cdot d\mathbf{r} = \\ &= m \cdot (d\mathbf{r}/dt) \cdot d\mathbf{v} = m \cdot \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = d(mv^2/2) \end{aligned}$$

care prin integrare devine **teorema variației energiei cinetice** prin relația:

$$L = \Delta E_C = mv_2^2/2 - mv_1^2/2 \quad (21)$$

unde energia cinetică a corpului este expresia:

$$E_C = mv^2/2 \quad [E_C]_{SI} = J \quad (22)$$

Energia cinetică a unui corp măsoară lucrul mecanic acumulat de acel corp sub formă de mișcare datorită acțiunii forțelor exterioare. Unitatea de măsură pentru energie este aceeași cu cea a lucrului mecanic, Joule.

Exemple

1. Plecând din repaus, automobilul de masă "m" se mișcă fără frecare sub acțiunea motorului care furnizează puterea constantă "P". Găsiți legea vitezei.

$$L = P \cdot t \quad mv^2/2 - 0 = P \cdot t \quad \Rightarrow \quad v = (2Pt/m)^{1/2} .$$

2. Acționează în plus o forță rezistentă F_r constantă. Știind că $P = F \cdot v$, legea forței devine:

$$m \cdot dv/dt = (P/v) - F_r \Rightarrow (m/F_r) \cdot v \cdot dv / [(P/F_r) - v] = dt$$

$$\Rightarrow (m/F_r) [-1 + (P/F_r) / (-v + P/F_r)] \cdot dv = dt$$

Integrând avem

$$t = (m/F_r) \{ -v - (P/F_r) \ln [(-v + P/F_r) / (P/F_r)] \}$$

$\Rightarrow$ Nu există formulă explicită pentru $v(t)$!

Din ecuația inițială pentru forță vedem că accelerația scade cu creșterea vitezei, anulându-se pentru viteza limită $v' = P/F_r$.

Energia potențială

Câteva tipuri de forțe sunt mult utilizate în modelarea fenomenelor fizice. Aici alături de noțiunea de energie cinetică, apare noțiunea de energie potențială. ***Energia potențială*** a unui corp măsoară lucrul mecanic acumulat de acel corp datorită modificării poziției sale sau a părților sale unele față de altele sub acțiunea forțelor exterioare.

Lucrul mecanic al forței gravitaționale de la suprafața Pământului $G=mg$

$$L = \int mg \, dh = mg (h_{\text{final}} - h_{\text{inițial}})$$

Ridicând un corp de masă m de la nivelul $H=0$ la înălțimea " h " efectuăm un lucru mecanic:

$$L = mgh$$

împotriva forței gravitaționale, lucru mecanic care este acumulat de corp sub formă de energie potențială.

Lucrul mecanic al forței gravitaționale $F = K \cdot m_1 \cdot m_2 / r^2$:

$$L = \int (K \cdot m_1 \cdot m_2 / r^2) \, dr = (K \cdot m_1 \cdot m_2) \int (1/r^2) \, dr$$

$$L = (K \cdot m_1 \cdot m_2) \cdot (-1/r) \Big|_1^2 = (K \cdot m_1 \cdot m_2) / r_1 - (K \cdot m_1 \cdot m_2) / r_2$$

$$V(r) = (Km)/r \Rightarrow \text{potențial gravitațional}$$

$$\mathbf{F} = -m \cdot dV/dr = -m \cdot \mathbf{grad}V = -m \cdot \nabla V$$

=> forță potențială.

unde gradientul potențialului este dat de relația:

$$\mathbf{grad}V = \nabla V = \mathbf{i} \, dV/dx + \mathbf{j} \, dV/dy + \mathbf{k} \, dV/dz$$

un vector care ne spune cât de repede variază în spațiu funcția (suprafața) $V(x,y,z)$, cât de abrupt este "relieful" suprafeței.

Lucrul mecanic al forței elastice $F = -k \cdot x$

$$L = \int (-k \cdot x) \, dx = -k \cdot x^2/2|_1^2 = -k \cdot x_1^2/2 + k \cdot x_2^2/2$$

$$W = k \cdot x^2/2 \quad \Rightarrow \text{energie potențială elastică}$$

Într-un câmp de forțe conservativ (forțe generate de un potențial) lucrul mecanic al forțelor câmpului este egal cu variația energiei potențiale cu semn schimbat:

$$L = -\Delta E_P$$

$$m \cdot g \cdot (h_1 - h_2) = m \cdot g \cdot h_1 - m \cdot g \cdot h_2 = E_{P1} - E_{P2} .$$

Dacă acest lucru mecanic se efectuează asupra unui corp, atunci variația energiei cinetice va fi:

$$L = \Delta E_C$$

Aceste două relații scăzute ne dau:

$$\Delta E_C + \Delta E_P = 0$$

care înseamnă:

$$E_C + E_P = \text{constant},$$

adică suma dintre energia cinetică și potențială a sistemului rămâne constantă.

Aceasta este tocmai *legea conservării energiei mecanice*.

Scurtă istorie a energiei

Termenul "energie" are semnificația fizică de "capacitate a unui sistem de a efectua lucru mecanic" și provine din limba greacă veche unde are semnificația de "activitate". Înțelegerea acestei noțiuni și a legii ei de conservare este de importanță fundamentală pentru orice om modern. Da, este ceva ce trebuie să facă parte din cultura de bază, generală "ceea ce-ți rămâne după ce ai uitat totul"! De asta dau aici câteva ancoră temporale pentru înțelege cum s-a dezvoltat ideea și cum au contribuit la ea oameni cu meserii diverse: filozofi, fizicieni, matematicieni, chimiști, ingineri, chirurgi și berari.

La sfârșitul anilor 1600, Gottfried Leibniz, matematician, om de știință, filozof și inginer, a introdus ideea de "forță vie" (*vis viva*, în latină) ca produs dintre masa unui obiect și viteza lui la pătrat (mv^2), ca o mărime care se conservă și este caracteristică materiei. Se crede că prima utilizarea a termenului "energie" în sensul modern al lui aparține lui Thomas Young, din 1807.

În 1829 se descrie "*energia cinetică*" în sensul ei actual ($mv^2/2$) de către Gustave-Gaspard Coriolis (matematician și inginer), care a introdus și noțiunea de "**lucru mecanic**" în 1826. 1853 este anul în care se introduce termenul de "*energie potențială*" de William Rankine (inginer, fizician și matematician scoțian).

Legea conservării energiei a fost enunțată la începutul secolului 19 și aplicată sistemelor izolate. iar echivalența dintre energia mecanică și căldură a fost enunțată de chirurgul german Julius Robert von Mayer în 1842 și independent de el demonstrată de fizicianul James Prescott Joule în 1843 (care era și berar!).

Echivalența dintre masă și energie, ce extinde legea conservării energiei incluzând și conservarea masei, a fost găsită de marele matematician francez Henri Poincaré în anul 1900, dar ea a fost explicit afirmată ca atare în 1905 de către Albert Einstein prin celebra sa formulă $E=mc^2$.

De menționat pentru profunzimea consecințelor este teorema lui Emmy Noether din 1915, publicată în 1918, care arată că orice simetrie continuă a teoriilor fizice are asociată o cantitate care se conservă. Concret invarianța teoriilor fizice la translația în timp implică conservarea mărimii numite "energie" (adică nu contează când dai drumul la cronometru sau când stabilești momentul "zero" al axei timpului).

Probleme de mecanică

1. Din Cluj către Dej pleacă un automobil cu viteza $v_a = 54 \text{ km/h}$ și simultan din Dej către Cluj un biciclist cu viteza $v_b = 24 \text{ km/h}$. La ce distanță de Cluj se întâlnesc? ($d_{Cj-Dj} = 60 \text{ km}$)
2. Se aruncă vertical în sus cu $v_o = 10 \text{ m/s}$ un corp. La ce înălțime ajunge? În cât timp? După cât timp ajunge din nou în origine?
3. Se aruncă oblic $\alpha = 45^\circ$ cu $v_o = 18 \text{ m/s}$ un corp. Calculați $h_{\max}$ și distanța maximă parcursă pe orizontală.
4. Fir $L = 14 \text{ m}$ fixat în 2 puncte aflate la distanța $L' = 7 \text{ m}$. De mijlocul firului atârnat corp $m = 80 \text{ kg}$. Calculați forțele de reacție din fir și din punctele de capăt.
5. Mobil $m = 100 \text{ kg}$ alunecă plecând din repaus din vârful planului înclinat $\alpha = 30^\circ$, $L = 10 \text{ m}$, $\mu = 0,1$.
 - a. Ce viteză are la baza planului?
 - b. Ce distanță parcurge pe orizontală până la oprire?
6. Aruncăm de jos în sus pe plan înclinat $\alpha = 30^\circ$, un corp cu $v_o = 12 \text{ m/s}$. Ce distanță parcurge pe plan până la oprire? ($\mu = 0,1$)

7. Un corp de masă $m=32$ kg, cade liber sub acțiunea greutății ($g=9,81$ m/s²). Aflați:
 - a) legea spațiului;
 - b) legea vitezei;
 - c) lucrul mecanic efectuat în primele 3s;
 - d) puterea primită de corp ca funcție de timp.
8. În cât timp accelerează un automobil cu masa 1000kg și putere a motorului $P=64$ CP ($1\text{CP}=736\text{W}$) de la $v=0$ la $v=108\text{km/h}$? [$L=\Delta W_C$, $P \cdot t=mv^2/2$]
9. Un corp se mișcă după legea vitezei: $v=16 \cdot t^3 - 24 \cdot t + 5$ (m/s). Aflați:
 - a) legea spațiului;
 - b) legea accelerației;
 - c) legea forței ($m=22\text{kg}$);
 - d) legea puterii.
10. Se dau masa automobilului $m = 1\,000$ kg, randamentul motorului $\eta=0,25$, puterea calorică a benzinei $q=46$ MJ/kg, densitatea benzinei $d = 0,9$ kg/l. Pornind din repaus automobilul accelerează timp de 10 s până la viteza maximă $v = 36$ km/h, apoi se mișcă uniform timp de 3 min., iar în final frânează timp de 10 s până la oprire. Neglijând frecările calculați:
 - a) lucrul mecanic efectuat;
 - b) câți litri de benzină consumă;
 - c) lucrul mecanic efectuat și câți litri de benzină consumă dacă viteza maximă este 54 km/h, iar timpul cât se mișcă uniform 2 min.;
 - d) consumul zilnic de benzină pentru cele două variante dacă situația descrisă se repetă de 100 de ori pe zi;
 - e) spațiul parcurs zilnic în cele două variante.

OSCILAȚII

Oscilatorul armonic are multe aplicații în diferite domenii. El descrie: oscilațiile unei mase atârnată de un resort, oscilațiile sarcinilor electrice care circulă printr-un circuit electric format din bobine și condensatoare, vibrațiile electronilor într-un atom, ale atomilor în nodurile rețelei cristaline, vibrațiile unui diapazon care generează unde sonore, creșterea unei colonii de bacterii sub acțiunea hranei furnizate și a otrăvurilor produse de bacterii, mișcarea unui pendul, mecanismul ce pune în mișcare ceasul sau vibrația unui pod sub acțiunea celor care circulă pe el. Toate aceste sisteme au un punct de echilibru din care fiind scoase sub acțiunea unui factor extern vor executa oscilații.

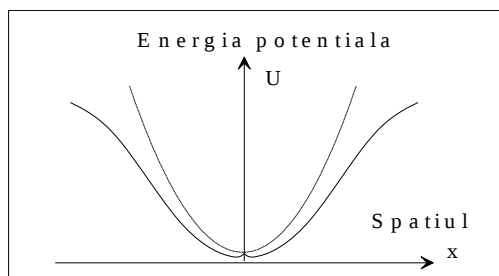


Figura 1. Curba reală a potențialului este aproximată cu o parabolă desenată cu linie întreruptă.

Din punct de vedere energetic aceste sisteme au o energie potențială de tipul celei prezentate în figura 1, unde prin linia

continuă s-a desenat energia potențială reală și prin linia întreruptă o parabolă care aproximează zona din jurul originii, unde se află minimumul energiei potențiale. În jurul originii se poate face dezvoltare în serie Taylor a expresiei energiei potențiale:

$$U(x) = U(0) + U'(0) x / 1! + U''(0) x^2 / 2! + \dots \quad (1)$$

Primul termen nu este important din punct de vedere fizic (fixarea energiilor de zero) al doilea termen este zero, fiindcă prima derivată se anulează într-un minim al funcției, iar al treilea termen este pozitiv, fiindcă derivata a doua este pozitivă într-un minim. Energia potențială se poate scrie:

$$U(x) = k \cdot x^2 / 2 \quad (2)$$

termenii de ordin superior, numiți termeni anarmonici, sunt neglijăți în cele mai multe cazuri (dar nu în toate!).

Oscilatorul armonic liber

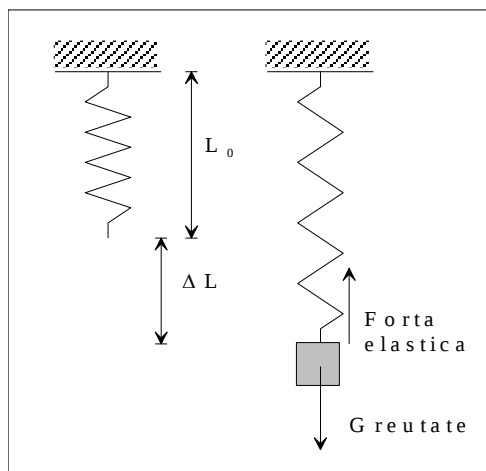


Figura 2. Oscilator armonic. Forța de greutate modifică doar poziția de echilibru a sistemului.

Forța care acționează asupra punctului material ce se mișcă în acest potențial este de tip elastic și se obține cu relația:

$$F = - dU / dx = - k \cdot x \quad (3)$$

Legea a 2-a dinamicii pentru mișcarea masei "m" sub acțiunea forței elastice va avea forma:

$$m \cdot d^2x / dt^2 = - k \cdot x \quad (4)$$

ce se poate rearanja ca:

$$m \cdot d^2x / dt^2 + kx = 0 \quad (5)$$

Pentru rezolvarea acestui tip de ecuație diferențială vom căuta soluția de forma:

$$x = A \cdot e^{\alpha t} \quad (6)$$

Înlocuind relația (6) în ecuația (5) obținem o ecuație de gradul doi după simplificările de rigoare (polinomul caracteristic):

$$m \cdot \alpha^2 + k = 0 \quad (7)$$

cu soluțiile:

$$\alpha', \alpha'' = \pm(-k/m)^{1/2} = \pm j \cdot (k/m)^{1/2} = \pm j \cdot \omega \quad (8)$$

Aici "j" este unitatea imaginară $(-1)^{1/2}$. Soluția generală a ecuației (6) va fi de forma:

$$x(t) = A_1 \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} + A_2 \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} \quad (9)$$

Relațiile lui Euler

Ținând cont de relația lui Euler:

$$e^{j \cdot \alpha} = \cos \alpha + j \cdot \sin \alpha \quad (10)$$

cu consecințele:

$$\sin \alpha = (e^{j \cdot \alpha} - e^{-j \cdot \alpha}) / (2 \cdot j) \quad \cos \alpha = (e^{j \cdot \alpha} + e^{-j \cdot \alpha}) / 2$$

$$d \sin \alpha / d \alpha = \cos \alpha \quad d \cos \alpha / d \alpha = - \sin \alpha$$

și de faptul că soluția cu semnificație fizică este o soluție pur reală, ea se va putea obține luând partea reală sau partea imaginară a soluției complexe (9). Constantele A_1 și A_2 vor fi determinate din condițiile inițiale impuse de datele problemei asupra poziției și vitezei (de exemplu). Dacă impunem condiția ca la momentul inițial viteza să fie zero și distanța față de poziția de echilibru să fie A , vom avea:

$$\operatorname{Re} x(0) = \operatorname{Re} (A_1 + A_2) = A \quad (11)$$

$$\operatorname{Re} v(0) = \operatorname{Re} (j \cdot \omega_0 \cdot A_1 - j \cdot \omega_0 \cdot A_2) = 0 \quad (12)$$

Din relația (12) se deduce $A_1 = A_2$, iar din (11) găsim

$$A_1 = A_2 = A/2.$$

Soluțiile finale sunt:

$$x(t) = A \cos \omega t \quad (13a)$$

$$v(t) = -\omega \cdot A \cdot \sin \omega t \quad (13b)$$

$$a(t) = -\omega^2 \cdot A \cdot \cos \omega t \quad (13c)$$

Noțiunile de bază cu care vom lucra la studiul oscilațiilor sunt:

- *Elongația* (x) - distanța corpului față de poziția de echilibru;
- *Amplitudinea* (A) - elongația maximă;
- *Faza* ($\omega \cdot t + \varphi$) - argumentul funcției sinus sau cosinus;
- *Faza inițială* (φ) - argumentul funcției sin/cosinus la $t=0$;
- *Frecvența circulară* (ω) sau *pulsția* - viteza unghiulară;
- *Perioada* (T) - durata unei oscilații complete;
- *Frecvența* (ν, f) - numărul oscilațiilor din unitatea de timp.

Oscilații proprii amortizate

Dacă pe lângă forța elastică generată de resort, forța de inerție datorată masei, apare în sistem o forță rezistentă proporțională cu viteza, avem de-a face cu oscilații amortizate. Astfel de forțe de frecare apar la deplasarea corpurilor în lichide și la deplasări cu viteze mici în gaze. Ecuația care descrie mișcarea sistemului va fi :

$$m \cdot d^2x/dt^2 + r \cdot dx/dt + k \cdot x = 0 \quad (1)$$

Soluția se caută sub forma $x = A \cdot e^{\alpha t}$, care transformă ecuația diferențială (1) în ecuație algebrică (polinomul caracteristic):

$$m \cdot \alpha^2 + r \cdot \alpha + k = 0 \quad (2)$$

cu soluțiile:

$$\alpha', \alpha'' = -r/(2 \cdot m) \pm [r^2/(4 \cdot m^2) - k/m]^{1/2} \quad (3)$$

Introducând notațiile:

$$\omega_0^2 = k/m \quad \text{și} \quad \tau = 2m/r \quad \delta = 1/\tau \quad (4)$$

soluțiile devin:

$$\alpha', \alpha'' = -1/\tau \pm [1/\tau^2 - \omega_0^2]^{1/2} \quad (5)$$

sau putem scrie:

$$\alpha', \alpha'' = -\delta \pm (\delta^2 - \omega_0^2)^{1/2} \quad (6)$$

Dacă **forța de frecare este mare:**

$$\delta \geq \omega_0 \quad r^2 \geq 4k \cdot m \quad (7)$$

atunci cele două soluții sunt reale și negative, soluția ecuației (1) va fi:

$$x = A_1 e^{\alpha' t} + A_2 e^{\alpha'' t} \quad (8)$$

adică o soluție exponențială, cu exponent negativ. Este o soluție aperiodică, elongația scăzând exponențial în timp.

La *amortizarea critică* ($r^2 = 4k \cdot m$), cele două soluții ale polinomului caracteristic coincid și soluția problemei este:

$$x(t) = e^{-rt/2m} (A_1 + A_2 \cdot t)$$

De remarcat că pentru m și k fixate, la amortizarea critică se obține cea mai rapidă revenire a sistemului la poziția de echilibru.

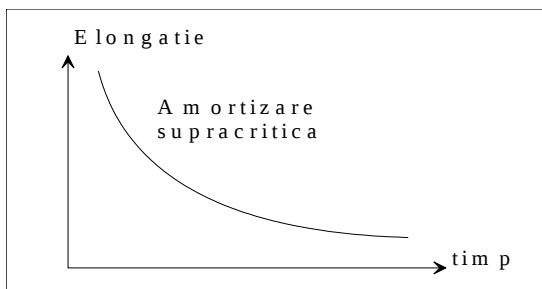


Figura 3. Răspuns aperiodic al oscilatorului amortizat supracritic.

Dacă forța de frecare este mică:

$$\delta < \omega_0 \quad (9)$$

atunci cele două soluții sunt complexe și se pot scrie:

$$\alpha', \alpha'' = -\delta \pm j \cdot (\omega_0^2 - \delta^2)^{1/2} = -\delta \pm j \cdot \omega \quad (10)$$

Soluția ecuației (1) va fi:

$$\underline{x} = e^{-\delta \cdot t} (A_1 \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} + A_2 \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t}) = A \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot e^{j \cdot (\omega \cdot t + \varphi)} \quad (11)$$

care scrisă sub forma clasică este:

$$x(t) = A \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) \quad (12)$$

Este o soluție cvasiperiodică, cu amplitudinea scăzând exponențial în timp.

Se remarcă faptul că frecvența proprie de oscilație este mai mică decât în cazul oscilatorului armonic neamortizat:

$$\omega = (\omega_0^2 - \delta^2)^{1/2} < \omega_0 \quad (13)$$

Se poate defini noțiunea de decrement logic:

$$\theta = \ln[A(t)/A(t+T)] = \ln e^{\delta \cdot T} = \delta \cdot T \quad (14)$$

și cea de **timp de relaxare** – timpul după care amplitudinea scade de "e" ori (2,71...ori):

$$A(t+\tau) = A(t)/e \Rightarrow \tau = 1/\delta \quad (15)$$

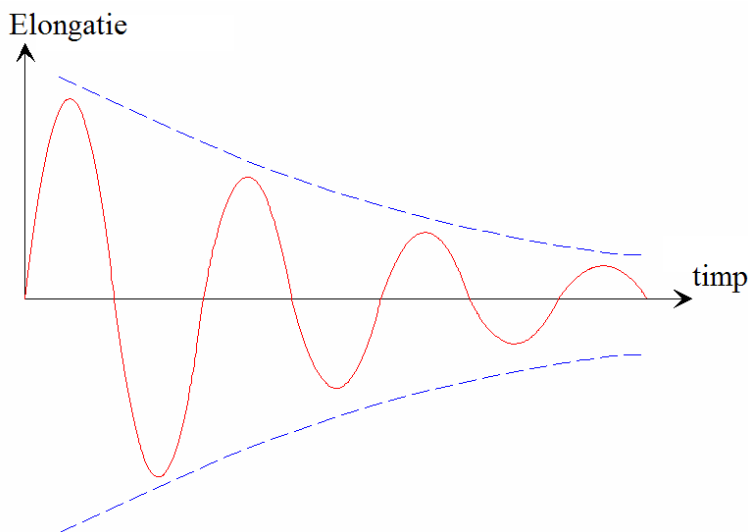


Figura 4. Oscilații amortizate.

Oscilatorul armonic forțat

Acționând asupra unui oscilator armonic amortizat cu o forță exterioară periodică, de tipul:

$$\underline{F} = F_0 \cdot e^{j\omega \cdot t} \quad (1)$$

ecuația care descrie mișcarea sistemului va fi:

$$m \cdot d^2 \underline{x} / dt^2 + r \cdot d \underline{x} / dt + k \cdot \underline{x} = \underline{F} \quad (2)$$

Vom căuta soluția ecuației de forma:

$$\underline{x} = \underline{A} \cdot e^{j\omega \cdot t} = A \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega \cdot t} = A \cdot e^{j(\omega \cdot t + \varphi)} \quad (3)$$

Înlocuind pe (3) în ecuația (2) și simplificând găsim:

$$(-m \cdot \omega^2 + j \cdot \omega \cdot r + k) A \cdot e^{j\varphi} = F_0 \quad (4)$$

Folosind notațiile:

$$\omega_0 = (k/m)^{1/2} \quad \tau = m / r \quad (5)$$

obținem următoarea expresie a amplitudinii complexe:

$$\begin{aligned} \underline{A} &= A \cdot e^{j\varphi} = (F_0/m) / [\omega_0^2 - \omega^2 + j \cdot \omega/\tau] = \\ &= (F_0/m) \cdot [(\omega_0^2 - \omega^2) - j \cdot \omega/\tau] / [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2/\tau^2] \end{aligned} \quad (6)$$

Unghiul de defazaj și amplitudinea reală se obțin astfel:

$$\operatorname{tg} \varphi = \sin \varphi / \cos \varphi = \operatorname{Im} \underline{A} / \operatorname{Re} \underline{A} = (-\omega/\tau) / (\omega_0^2 - \omega^2) \quad (7)$$

$$A = [(\operatorname{Re} \underline{A})^2 + (\operatorname{Im} \underline{A})^2]^{1/2} = (F_0/m) / [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2/\tau^2]^{1/2} \quad (8)$$

ele fiind reprezentate grafic în figurile 5 și 6.

La soluția(3) a ecuației neomogene (2) se poate adăuga orice soluție a ecuației omogene, obținându-se astfel tot o soluție a ecuației neomogene (2).

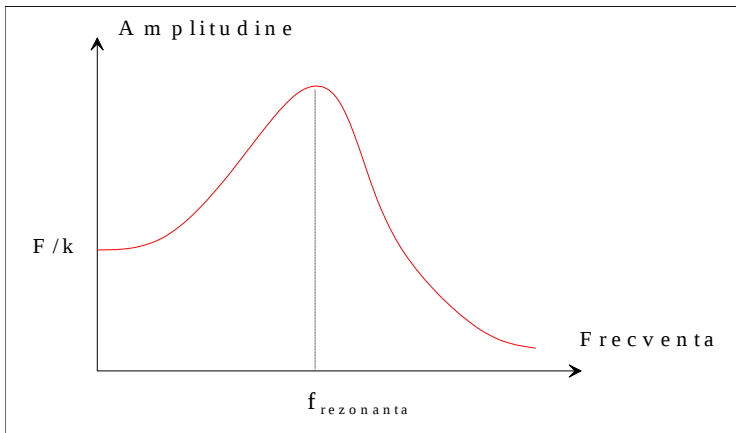


Figura 5. Amplitudinea oscilatorului funcție de frecvența excitației.

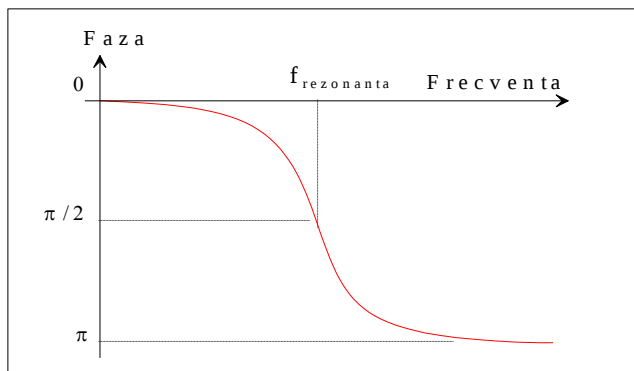


Figura 6. Defazajul dintre elongație și forța excitatoare.

Se poate introduce noțiunea de factor de calitate, ca raport al amplitudinilor la frecvența proprie de rezonanță ($\omega = \omega_0$) și la frecvență foarte mică ($\omega \rightarrow 0$):

$$Q = A(\omega = \omega_0) / A(\omega = 0) = \omega_0 \cdot \tau \quad (9)$$

Tratarea sistemelor oscilante mecanice se poate simplifica mult prin introducerea noțiunii impedanță mecanică, ca raport între forța complexă ce acționează asupra sistemului și viteza complexă a acestuia :

$$Z_M = F/v \quad (10)$$

Ecuția (2) va fi scrisă ca:

$$m \cdot dv/dt + r \cdot v + (1/C_M) \int v \cdot dt = F \quad (11)$$

unde $C_M = 1/k$ reprezintă o "capacitate" mecanică. Fiindcă lucrăm cu mărimi sinusoidale și viteza va fi o astfel de mărime:

$$v = v_0 \cdot e^{j \cdot (\omega \cdot t + \phi)} \quad (12)$$

de unde:

$$dv/dt = j \cdot \omega \cdot v \quad (13)$$

$$\int v \cdot dt = v/j \cdot \omega \quad (14)$$

Ecuția (11) va fi scrisă acum astfel:

$$[j \cdot \omega \cdot m + r + 1/(j \cdot \omega \cdot C_M)] \cdot v = F \quad (15)$$

de unde putem obține impedanța mecanică a sistemului:

$$Z_M = F/v = r + j \cdot \omega \cdot m + 1/(j \cdot \omega \cdot C_M) \quad (16)$$

aceasta se poate scrie ca :

$$Z_M = r + j \cdot [\omega \cdot m - 1/(\omega \cdot C_M)] \quad (17)$$

Modulul acestei impedanțe este:

$$Z_M = [(\text{Re}Z)^2 + (\text{Im}Z)^2]^{1/2} = \{r^2 + [\omega \cdot m - 1/(\omega \cdot C_M)]^2\}^{1/2} \quad (18)$$

iar defazajul dintre forță și viteză va fi:

$$\text{tg}\varphi = \text{Im}Z/\text{Re}Z = [\omega \cdot m - 1/(\omega \cdot C_M)] / r \quad (19)$$

Se remarcă analogia perfectă între sistemul mecanic oscilant și circuitul RLC serie, cu următoarele corespundențe:

masă (m)	=> inductanța (L)
elasticitate (C_M)	=> capacitate electrică (C)
rezistența mecanică (r)	=> rezistența electrică (R)
forța (F)	=> tensiunea electrică (U)
viteza (v)	=> curentul electric (I)

În plus puterea instantanee se exprimă ca produs între forță și viteză:

$$P = F \cdot v \quad (20)$$

ea având o componentă activă (energie ce se consumă efectiv) și o componentă reactivă (datorată transformării periodice a energiei cinetice în energie potențială și invers).

$$P = F_o \cdot v_o \cdot \cos\varphi \quad (21)$$

$$P_r = F_o \cdot v_o \cdot \sin\varphi \quad (22)$$

$$P_a = F_o \cdot v_o \quad (23)$$

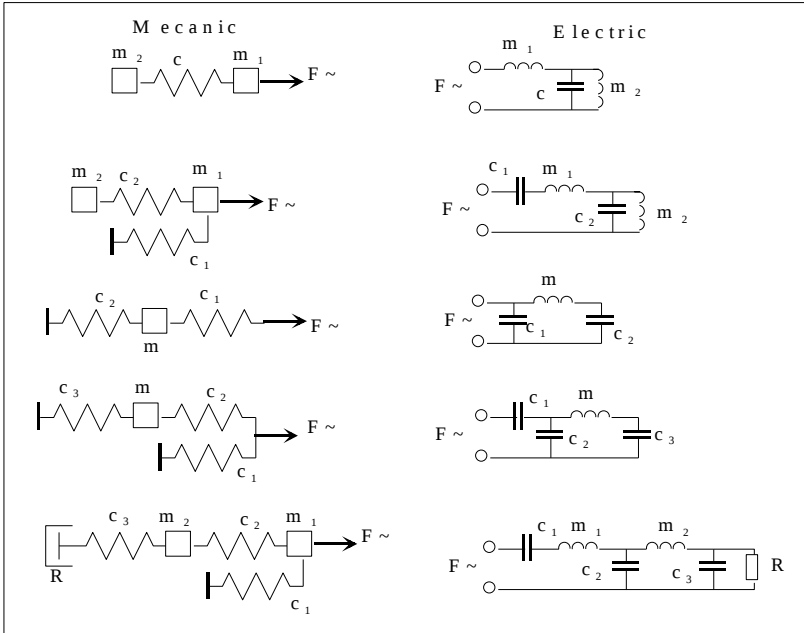


Figura 7. Scheme echivalente electrice ale unor aranjamente mecanice

Cu noțiunea de impedanță mecanică se pot rezolva probleme mecanice complexe în care apar mai multe mase, resorturi, elemente disipative (rezistențe) legate în serie și paralel. Criteriul după care vedem dacă elementele sunt legate în paralel este acela că ele sunt acționate de aceeași forță sau sunt legate în serie este acela că ele au aceeași viteză (echivalent aceeași deplasare).

UNDE

Într-un mediu elastic vibrația unui corp se transmite mediului aflat în contact cu el. Datorită interacțiunii elastice dintre particulele mediului această perturbație nu rămâne localizată lângă sursa perturbatoare ci se propagă. Particulele puse în mișcare de corpul care vibrează acționează asupra particulelor învecinate care la rândul lor antrenează alte particule și așa mai departe. În acest mod se crează unde elastice în mediu, care se propagă de la sursa inițială în întreg spațiul.

Cum se formează o undă

În cilindrul de secțiune S , extins în lungul axei Ox , delimităm un corp prin două secțiuni transversale aflate la distanța " x " și respectiv " $x+dx$ " de originea axei. Acest cilindru infinitesimal este **deplasat** și **deformat** de către perturbația care se propagă prin mediu.

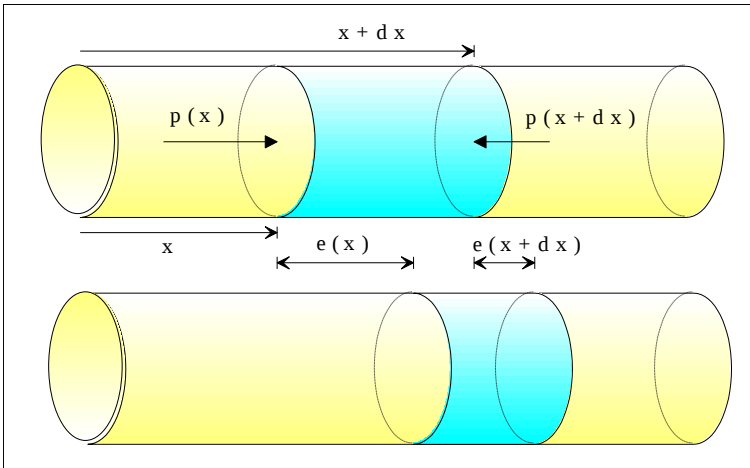


Figura 1. Formarea unei datorită legii forței (legea a 2-a a lui Newton) și elasticității mediului (legea lui Hooke).

Deplasarea cilindrului este controlată de **legea a doua a dinamicii**:

$$F = m \cdot a \quad (1)$$

care după simplificări devine următoarea *ecuație de mișcare*:

$$\partial p / \partial x = -\rho \cdot \partial v / \partial t \quad (2)$$

Semnul ∂ este pentru derivarea parțială, adică toate celelalte variabile sunt considerate constante înafară de cea după care se face derivarea parțială.

S-a ținut seama că *forța* totală care acționează asupra corpului este generată de presiunile ce acționează pe cele două baze ale cilindrului:

$$F = p(x) \cdot S - p(x+dx) \cdot S = -S \cdot dx \cdot \partial p / \partial x \quad (3a)$$

masa lui este:

$$m = \rho \cdot S \cdot dx \quad (3b)$$

și accelerația:

$$a = \partial v / \partial t \quad (3c)$$

Deformarea corpului este descrisă de **legea lui Hooke**, unde tensiunea mecanică indusă în corp este egală cu forța ce acționează pe una din bazele cilindrului, forța de pe a doua bază fiind forța de reacțiune:

$$p = F/S = -E \cdot \Delta L / L \quad (4)$$

Lungimea inițială a cilindrului este " dx ", iar modificarea lungimii lui este dată de diferența dintre cele două elongații (deplasări) pe care le suferă cele două secțiuni:

$$\Delta L = e(x+dx) - e(x) = (\partial e / \partial x) \cdot dx \quad (5)$$

Efectuând simplificările ce se impun obținem **legea lui Hooke** de forma următoare:

$$p = -E \cdot (\partial e / \partial x) \quad (6)$$

unde "E" este modulul de elasticitate longitudinal (Young) al mediului.

Combinând relația (6) cu relația (2) obținem **ecuația undelor** pentru acest caz simplu al propagării unidimensionale:

$$\partial^2 e / \partial x^2 = (1/c^2) \partial^2 e / \partial t^2 \quad (7)$$

unde:

$$c = (E / \rho)^{1/2} \quad (8)$$

este **viteza de propagare** a undei. Fiindcă viteza de oscilație este derivata elongației $v = \partial e / \partial t$, obținem derivând relația (7) după t :

$$\partial^2 v / \partial x^2 = (1/c^2) \partial^2 v / \partial t^2. \quad (9)$$

o ecuație a undelor pentru viteză. Derivând ecuația (7) după "x", ținând cont de relația (6) avem:

$$\partial^2 p / \partial x^2 = (1/c^2) \partial^2 p / \partial t^2 \quad (10)$$

tot o ecuație a undelor pentru presiune.

Soluția generală pentru ecuația undelor (7) este de tipul:

$$e(x,t) = f_1(x-ct) + f_2(x+ct) \quad (11)$$

lucru care se poate verifica imediat prin derivarea soluției (11) după "x" și "t" și înlocuirea în ecuația (10). Funcțiile f_1 și f_2 sunt arbitrare, forma lor concretă fiind impusă de modul în care se excită mediul. De exemplu dacă punem în mișcare mediul printr-o excitație armonică atunci funcțiile f_1 și f_2 vor fi funcții armonice. Funcția f_1 descrie propagarea perturbației în sensul axei Ox (de la stânga la dreapta pe figură), iar funcția f_2 descrie propagarea perturbației în sens contrar axei Ox (de la dreapta la stânga pe figura 1).

Ce viteză au undele în diverse medii elastice

Viteza de propagare pentru **unde longitudinale** (direcția de oscilație a particulelor mediului este paralelă cu direcția de propagare a undei) în mediul **solid** este:

$$c = (E/\rho)^{1/2} \quad (12)$$

unde:

E – modulul longitudinal de elasticitate al mediului (Young),
 ρ – densitatea mediului.

Undele transversale (direcția de oscilație a particulelor din mediu este perpendiculară pe direcția de propagare a undei) pot fi generate doar în **solide**, iar viteza lor de propagare este:

$$c = (G/\rho)^{1/2} \quad (13)$$

unde G – modulul transversal de elasticitate al mediului ($G \approx 0,4 \cdot E$, aici 0,4 este raportul Poisson dintre cele două module de elasticitate).

Tabel cu viteza undelor longitudinale în medii solide

Material	ρ (10^3 kg/m ³)	E (10^{10} N/m ²)	Raport Poisson	c_{exp} (10^3 m/s)	Z_o (10^6 rayl)
Aluminiu	2,7	7,1	0,33	5,15	13,9
Cupru	8,9	12,2	0,35	3,7	33
Fonta	7,7	10,5	0,28	3,7	28,5
Oțel	7,7	19,5	0,28	5,05	39
Plumb	11,3	1,65	0,44	1,2	13,6
Cuarț	2,65	7,9	0,33	5,45	14,5
Ebonita	1,1	0,23	0,4	1,45	1,6
Cauciuc	0,95	0,0005	0,5	0,007	0,065

Într-un **lichid** se pot propaga doar unde longitudinale cu viteza:

$$c = (\chi/\rho)^{1/2} \quad (14)$$

unde " χ " este modulul de compresibilitate al lichidului.

Tabel cu viteza undelor longitudinale în medii lichide

Lichid	t (°C)	ρ (10 ³ kg/m ³)	χ (10 ⁹ N/m ²)	c (10 ³ m/s)	Z _o (10 ⁶ rayl)
Apa	20	0,998	2,18	1,48	1,48
Apa sărată	13	1,026	2,28	1,5	1,54
Mercur	20	13,6	25,3	1,45	19,7

În **gaze** se pot propaga doar undele longitudinale cu viteza:

$$c = (\gamma \cdot p_o / \rho)^{1/2} \quad (15)$$

unde: "p_o" este presiunea gazului (ex: presiunea atmosferică),
 "ρ" densitatea gazului (a aerului 1,29 kg/m³), iar
 "γ" este indicele adiabatic al gazului (la aer γ=1,41).

Ținând cont de definiția densității și de ecuația termică de stare a gazului, presiunea este:

$$p_o = (m/V) \cdot R \cdot T/M = \rho \cdot R \cdot T/M \quad (16)$$

Expresia vitezei de propagare a undei în gaz devine:

$$c = (\gamma \cdot R \cdot T/M)^{1/2} \quad (17)$$

unde: T –temperatura gazului în grade Kelvin,
 M–masa molară a gazului (aer 29 kg/kmol),
 R –constanta universală a gazelor (8310 J/K·kmol)

Viteza de propagare a undei în gaz depinde doar de compoziția gazului prin intermediul masei molare și de temperatura sa. Ea nu depinde de presiunea gazului.

Tabel cu viteza undelor longitudinale în gaze

Gaz	t (°C)	ρ (kg/m ³)	γ	c_{exp} (m/s)	Z_o (rayl)	c_{calc} (m/s)
Aer	0	1,29	1,402	331	428	
Aer	20	1,21	1,402	343	415	
H ₂	0	0,09	1,41	1296	114	
Abur	100	0,6	1,32	404	242	

Probleme

1. Calculați viteza de propagare a sunetului în aer la temperaturile:

$$t = -25; -5; 0; 5; 25 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

$$M_{\text{aer}} = 29 \text{ kg/kmol}, R=8310 \text{ J/(kmol}\cdot\text{K)}, \gamma=1,4$$

2. Calculați viteza de propagare a sunetului în gazele de ardere de la un motor de automobil (14% CO₂ și 86% N₂).

$$M(\text{CO}_2)=12+2\cdot 16=44\text{kg/kmol}$$

$$M(\text{N}_2)=2\cdot 14=28\text{kg/kmol}, \quad \gamma=1,4.$$

Caracteristici cinematice ale undei

Viteza de propagare a undei "c" și frecvența "v" cu care oscilează sursa perturbatoare (similar perioada T) determină **lungimea de undă "λ"**:

$$\lambda = c \cdot T = c/v \qquad [\lambda]_{\text{SI}} = \text{m} \qquad (18)$$

definită ca distanța între două puncte ale spațiului care oscilează cu o diferență de fază $2\cdot\pi$ radiani (360°). **Numărul de undă "k"** este:

$$k = 2 \cdot \pi / \lambda \quad [k]_{SI} = m^{-1} \quad (19)$$

Exemple

Undele acustice audibile, sesizabile de către urechea umană, au frecvențele cuprinse între 16 Hz și 20 000 Hz. Știind viteza de propagare a sunetului în aer $c=340$ m/s, calculați lungimile de undă.

$$\begin{aligned} R. \quad \lambda_{\max} &= c/v_{\min} = 340 \text{ m/s} / 16 \text{ Hz} = 21,25 \text{ m} \\ \lambda_{\min} &= c/v_{\max} = 340 \text{ m/s} / 20\,000 \text{ Hz} = 17 \text{ mm} \end{aligned}$$

Calculați lungimile de undă pentru sunetul audibil ce se propagă în apă unde viteza de propagare este $c=1500$ m/s.

Gama de frecvențe se exprimă în octave sau decade:

Decada =interval de frecvențe $[v_{\min}, v_{\max}]$, când $v_{\max} / v_{\min} =10$.

Octava =intervalul de frecvențe $[v_{\min}, v_{\max}]$, când $v_{\max} / v_{\min} =2$.

Domeniul frecvențelor audibile de la 20 la 20 000 Hz cuprinde 3 decade, respectiv 10 octave.

Înălțimea sunetului pur, sinusoidal, este dată de frecvența lui. Sunetele înalte au frecvența mare, sunetele joase au frecvență mică. fundamentală a sunetului.

Un sunet complex, dar armonic e caracterizat de **timbrul** lui.

Timbrul este dat de prezența pe lângă frecvența fundamentală (componenta sinusoidală cu amplitudinea cea mai mare) și a altor frecvențe corelate cu frecvența fundamentală (armonicele superioare). *Analiza spectrală* face analiza sunetelor în funcție de amplitudinea diverselor frecvențe componente.

Caracteristici dinamice ale undei

Presiunea totală a aerului " p_{tot} " variază în jurul valorii de echilibru " p_o " (presiunii atmosferice) după o lege similară celei după care se mișcă membrana ce pune în mișcare mediul. Dacă deplasarea membranei se face după o lege sinusoidală:

$$x = x_m \cdot \sin(\omega t) \quad (20)$$

atunci presiunea mediului se va modifica conform relației:

$$p_{\text{tot}} = p_o + p_m \cdot \sin(\omega t - \varphi) = p_o + p_a \quad (21)$$

unde:

$$p_a = p_m \cdot \sin(\omega t - \varphi) \quad (22)$$

reprezintă **presiunea acustică**, partea variabilă a presiunii totale a aerului. Presiunea acustică și viteza de oscilație sunt legate prin legea forței:

$$-\partial p / \partial x = \rho \cdot \partial v / \partial t \quad (23)$$

Mai general avem relația vectorială:

$$-\nabla p = \rho \cdot \partial v / \partial t \quad (24)$$

Pentru *unde armonice plane* presiunea și viteza sunt în fază și avem:

$$j k p = j \omega \rho v \quad \text{sau} \quad p = \rho \cdot c \cdot v \quad (25)$$

Aici "j" este unitatea imaginară $(-1)^{1/2}$ și apare în urma derivării în ecuația (23).

Se definește **impedanța specifică** sau **impedanța de undă** ca:

$$Z_o = p/v = \rho \cdot c \quad [Z]_{SI} = \text{Pa/m} = \text{rayl (Rayleigh)} \quad (26)$$

care este o proprietate a mediului în care se propagă unda.

Pentru *unde sferice* presiunea acustică și viteza de oscilație nu sunt în fază. Impedanța de undă la undele sferice este un număr complex:

$$Z_S = p/v = \rho \cdot c \cdot j \cdot k \cdot r / (1 + j \cdot k \cdot r) \quad (27)$$

La distanțe mari de sursa sonoră $k \cdot r \gg 1$, impedanța de undă a undelor sferice se comportă similar impedanței unei plane:

$$Z_o = p/v \approx \rho \cdot c \quad (28)$$

Exemple

Amplitudinea de oscilație a unei membrane care vibrează cu frecvența $f=100\text{Hz}$ este $A=1\text{mm}$. Aflați viteza maximă de oscilație și presiunea acustică creată în aer.

$$v_{\max} = \omega \cdot A = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot A = 0,628 \text{ m/s}$$

$$p_{\max} = Z_o \cdot v_{\max} = \rho \cdot c \cdot v_{\max} = 1,21 \cdot 340 \cdot 0,628 = 258 \text{ Pa}$$

Ce presiune acustică crează aceeași membrană în apă?

$$p_{\max} = Z_o \cdot v_{\max} = \rho \cdot c \cdot v_{\max} = 10^3 \cdot 1500 \cdot 0,628 = 9,42 \cdot 10^5 \text{ Pa} \approx 9,4 \text{ atmosfere!}$$

Aceeași presiune sonoră crează aceeași senzație acustică la o frecvență dată. Într-un mediu dat (se cunoaște impedanța specifică Z_o) se crează o presiune anume "p", constantă, când se menține constantă viteza de oscilație a membranei care pune în oscilație mediul, indiferent de frecvență. Legătura dintre viteza de oscilație și elongație și accelerație este:

$$e = v/\omega \qquad a = \omega \cdot v \quad (29)$$

Pentru aceeași presiune acustică, deci aceeași viteză de oscilație, amplitudinea oscilației membranei este mai mică la frecvențe mari și mai mare la frecvențe mici. Pentru aceeași

presiune acustică la 20 Hz amplitudinea este de 1000 de ori mai mare decât cea de la 2000 Hz.

La frecvența $f=1\text{kHz}$ presiunea acustică minimă sesizabilă de urechea umană este $p_o=2\cdot 10^{-5}\text{ Pa}$ (presiune efectivă, $p_{\text{ef}} = p_{\text{max}}/2^{1/2}$). Aflați viteza și elongația efectivă a undei sonore.

$$v_{\text{ef}} = p_{\text{ef}} / Z_o = 2\cdot 10^{-5} / 411 = 4,87\cdot 10^{-8} \text{ m/s}$$

$$e_{\text{ef}} = v_{\text{ef}} / \omega = 4,87\cdot 10^{-8} / (2\cdot 3,14\cdot 10^3) = 0,77\cdot 10^{-11} \text{ m} !!$$

Calculați valoarea elongației și vitezei de oscilație a aerului pentru o presiune sonoră $p=10^{-1}\text{ Pa}$ ($=1\mu\text{bar}$) la $v=1\text{kHz}$ ($\rho\cdot c=415\text{kg/s}\cdot\text{m}^2$).

$$x = p / (\omega \cdot \rho \cdot c) = 10^{-1} / (2\cdot 3,14\cdot 10^3 \cdot 415) = 0,38 \cdot 10^{-7} \text{ m} !!!$$

$$v = \omega \cdot x = 2\cdot 3,14\cdot 10^3 \cdot 0,38\cdot 10^{-7} = 2,39\cdot 10^{-4} \text{ m/s}$$

Relații energetice

– **Intensitatea sonoră** (I) = energia acustică care trece prin unitatea de suprafață în unitatea de timp:

$$I = \frac{\text{forță} \cdot \text{deplasare}}{\text{suprafață} \cdot \text{timp}} = p \cdot v = \frac{p_{\text{ef}}^2}{Z_o} = \frac{p_{\text{ef}}^2}{\rho \cdot c} \quad (30)$$

Ultima relație este valabilă pentru orice tip de undă.

– **Nivelul presiunii sonore** (sound pressure level, SPL) = logaritmul zecimal al raportului dintre presiunea acustică măsurată și presiunea acustică de referință $p_o=2\cdot 10^{-5}\text{ Pa}$ (presiune minimă audibilă la 1kHz):

$$L_p = 20 \cdot \log_{10}(p/p_o) \text{ [în B, Bell-i]} = 20 \cdot \log_{10}(p/p_o) \text{ [în dB]} \quad (31)$$

– **Nivelul intensității sonore** = logaritmul zecimal al raportului dintre intensitatea acustică măsurată și intensitatea acustică de referință, intensitatea minimă audibilă la 1 kHz, $I_0=10^{-12}$ W/m²:

$$L_I = \log_{10}(I/I_0) \text{ [în B, Bell-i]} = 10 \cdot \log_{10}(I/I_0) \text{ [în dB]} \quad (32)$$

Nivelul unui sunet dat este același în decibeli (dB) indiferent de faptul că este exprimat ca nivel de presiune sau ca nivel de intensitate sonoră.

Exemple

La creșterea cu 20 dB a nivelului intensității, intensitatea acustică a crescut de 100 de ori:

$$\begin{aligned} \Delta L &= L_2 - L_1 = 10 \cdot \lg(I_2 / I_1) = 10 \cdot \lg 100 = 20 \text{ dB} \\ I_2 &= I_1 \cdot 10^{\Delta L(\text{dB}) / 10} \end{aligned} \quad (33)$$

iar presiunea sonoră de 10 ori:

$$\begin{aligned} \Delta L &= L_2 - L_1 = 20 \cdot \lg(p_2 / p_1) = 20 \cdot \lg 10 = 20 \text{ dB} \\ p_2 &= p_1 \cdot 10^{\Delta L(\text{dB}) / 20} \end{aligned} \quad (34)$$

– **Nivelul acustic** (loudness level) este dat în decibeli acustici dB(A) (=Foni) și reprezintă curbe de *egală senzație auditivă*.

Nivelul intensității (dB) funcție de frecvență și nivelul acustic (dB_A)

Nivel sonor dB(A) Frecvența (Hz) ↓	0 dB _A	20 dB _A	40 dB _A	60 dB _A	80 dB _A	100 dB _A	120 dB _A
20	70	80	90	101	112	128	145
100	25	37	51	68	85	103	125
200	13	27	42	60	78	98	122
500	8	20	38	56	75	96	119
1000	5	20	40	60	80	100	120
3500	-3	13	33	50	70	88	105
8500	17	30	48	67	87	107	130

12000	11	23	40	57	78	104	140
15000	20	30	45	60	80	110	145

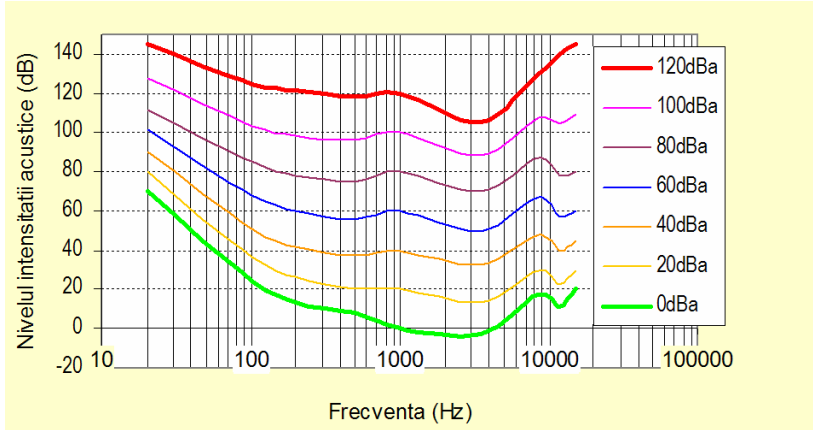


Figura 2. Curbele de nivel acustic funcție de frecvență.

Din conservarea energiei puterea "P" a sursei punctiforme ce emite izotrop (la fel pe toate direcțiile spațiului) se leagă de intensitatea sonoră "I" la distanța "r" de sursă prin relația:

$$P = I \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 \quad I = P / (4 \cdot \pi \cdot r^2) \quad [I]_{SI} = W/m^2 \quad (35)$$

Intensitatea unei sfere se leagă de presiunea sonoră "p" prin relația:

$$I = p^2 / (\rho \cdot c) \quad (36)$$

de unde presiunea sonoră efectivă este:

$$p = [P \cdot \rho \cdot c / (4 \cdot \pi)]^{1/2} / r \quad (37)$$

Dacă sursa emite doar într-o jumătate a spațiului (oscilează într-un perete) unghiul solid sub care emite este doar 2π și relația devine:

$$P = I \cdot 2 \cdot \pi \cdot r^2 \quad I = P / (2 \cdot \pi \cdot r^2) \quad (38)$$

Când sursa oscilează pe muchia dintre doi pereți unghiul solid sub care emite este π și:

$$I = P / (\pi \cdot r^2) \quad (39)$$

Când sursa este plasată într-un colț al camerei unghiul solid sub care emite este $\pi/2$ și:

$$I = 2 \cdot P / (\pi \cdot r^2) \quad (40)$$

– **Densitatea energiei sonore** (E) = energia undei din unitatea de volum

$$E = I/c \text{ [J/m}^3\text{]} \text{ pentru undă plană} \quad (41)$$

Pentru o undă plană avem relațiile:

$$I = p^2 / (\rho \cdot c) \text{ și } v = p / (\rho \cdot c)$$

deci

$$I = v^2 \cdot \rho \cdot c = \omega^2 \cdot x^2 \cdot \rho \cdot c \quad (42)$$

Aici produsul " $\rho \cdot c$ " este **impedanța acustică specifică a mediului** care pentru aer la 20°C și 760 mm Hg are valoarea:

$$\rho \cdot c = 1,21 \text{ kg/m}^3 \cdot 344 \text{ m/s} = 416 \text{ kg/(s} \cdot \text{m}^2\text{)}$$

Experiment:**Determinarea Vitezei Undelor Acustice**

Viteza de propagare într-un mediu elastic a unei unde este:

$$c = (E / \rho)^{1/2} \quad (1)$$

cu "E" modulul de elasticitate al mediului și "ρ" densitatea lui.

Pentru **gaze**, viteza de propagare (1) a undelor longitudinale devine:

$$c = (\gamma \cdot p / \rho)^{1/2} \quad (2)$$

unde "p" este presiunea gazului (atmosferică), "ρ" densitatea gazului (a aerului 1,29 kg/m³), iar "γ" este indicele adiabatic (aer γ=1,41).

Din ecuația termică de stare și din definiția densității, presiunea este:

$$p = (m/V) \cdot R \cdot T/M = \rho \cdot R \cdot T/M \quad (3)$$

iar expresia vitezei de propagare a undei în gaz devine:

$$c = (\gamma \cdot R \cdot T/M)^{1/2} . \quad (4)$$

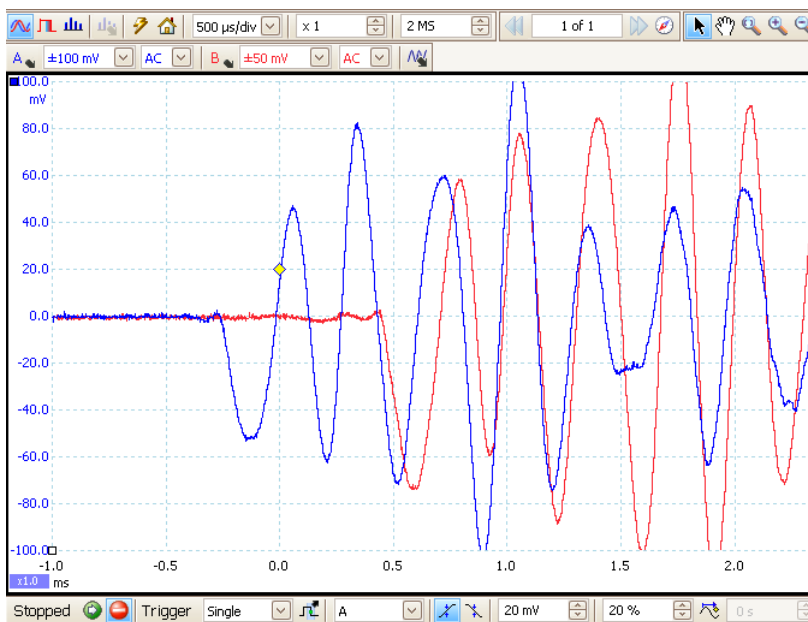
unde: T –temperatura gazului în grade Kelvin,
M–masa molară a gazului (aer 29 kg/kmol),
R –constanta universală a gazelor (8310 J/K·kmol)

Viteza de propagare în gaz depinde doar de temperatura lui și de compoziția sa (prin intermediul masei molare), dar nu depinde de presiunea gazului.

Dispozitivul Experimental

Aranjamentul experimental constă din 2 microfoane, unul pe poziție fixă (A), celălalt (B) pe poziție reglabilă la distanța D

față de primul. Semnalul de la microfoane este înregistrat de un osciloscop digital Picoscope.



Semnalul albastru este de la microfonul apropiat de sursa de zgomot, iar cel roșu de la microfonul depărtat de sursă.

Osciloscopul este setat pe **bara de SUS**: "collection time" 500μs/div, "input range" pe A (B) 100 mV (50 mV), pe **bara de JOS**: "trigger" (declanșare) "single", "trigger channel" A, "threshold" (prag declanșare) 20mV.

Generează sunetul prin lovirea unei bucăți de lemn. Atenție ca sursa de sunet să fie colineară cu cele 2 microfoane și butonul verde (stânga jos) de la osciloscop să fie apăsat (Running). După achiziția de semnal se activează butonul roșu din stânga jos (Stopped). Ținând cont de asemănarea semnalelor de la cele 2 microfoane, se identifică două vârfuri corespondente, unul pe curba albastră (semnalul de la microfonul A) și celălalt vârf pe curba roșie (semnalul de la B). Se citesc timpzii corespunzători:

pune cursorul mouse-ului pe punct, clic stânga, iar calculatorul afișează timpul corespunzător punctului. Te poți ajuta de "lupă" pentru a mări imaginea și a poziționa mai bine cursorul. Trece în tabel întârzierea τ , diferența timpilor pentru vârfurile alese. După repoziționarea microfonului mobil, B, se reia ciclul apăsând butonul verde (stânga jos pe ecran).

Prelucrarea datelor experimentale

Se reprezintă grafic distanța D dintre microfoane (pe Oy) în funcție de întârzierea semnalului τ (pe Ox). Se trasează dreapta ce trece cel mai aproape de punctele experimentale și prin origine ($D=0$ implică $\tau=0$). Folosind două puncte de pe dreaptă, cât mai depărtate între ele, se calculează viteza de propagare a sunetului (panta drepte):

$$c = \operatorname{tg} \alpha = \Delta D / \Delta \tau (= \Delta y / \Delta x) \text{ [m/s]} \quad (5)$$

Ca variantă se calculează viteza medie de propagare:

$$v = (1/N) \cdot \sum D/\tau \quad (6)$$

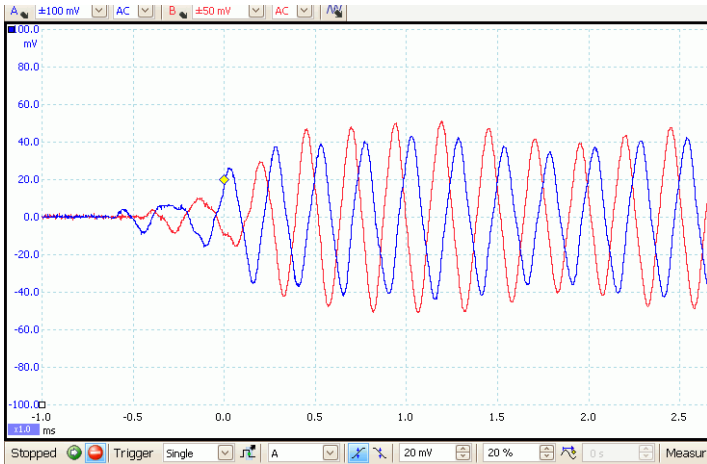
Comparați rezultatul experimental cu cel teoretic obținut din relația (4) ținând cont de valorile date acolo și temperatura aerului.

Tabel pentru date experimentale

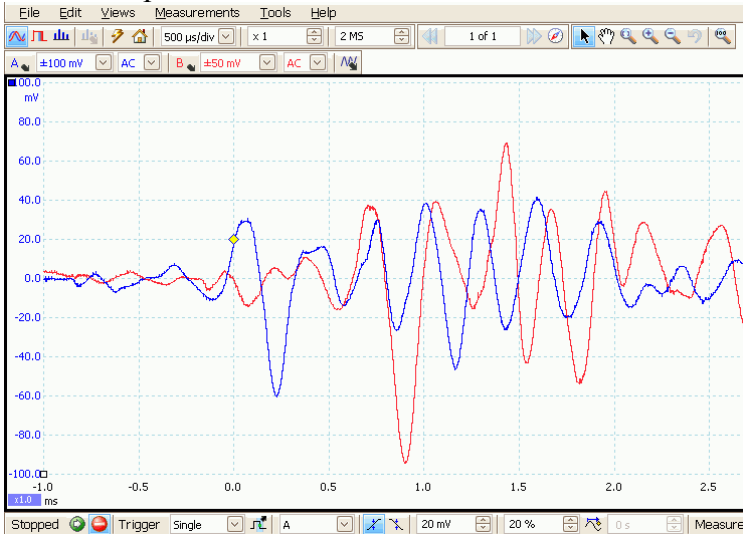
distanța D (cm)	5	10	15	20	25
întârzierea τ (ms)					
viteza sunetului D/τ (m/s)					

Surse alternative de sunet

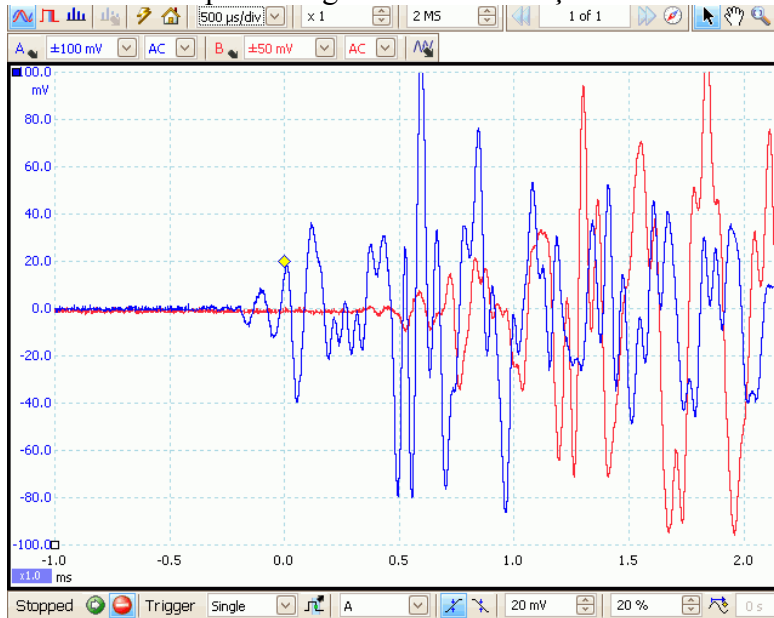
Ca sursă de sunet se poate folosi montajul asociat lucrării, care din 5 în 5 secunde generează un semnal aproximativ sinusoidal. Semnalul fiind mai slab, sursa trebuie plasată la 5-10 cm de microfonul fix (A).



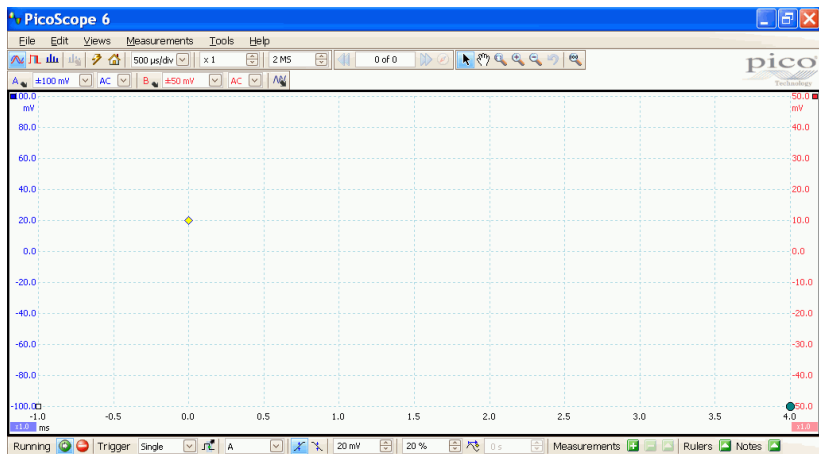
Bătaia din palme e o altă sursă de sunet



Lovitura metal pe metal generează frecvențe ceva mai mari

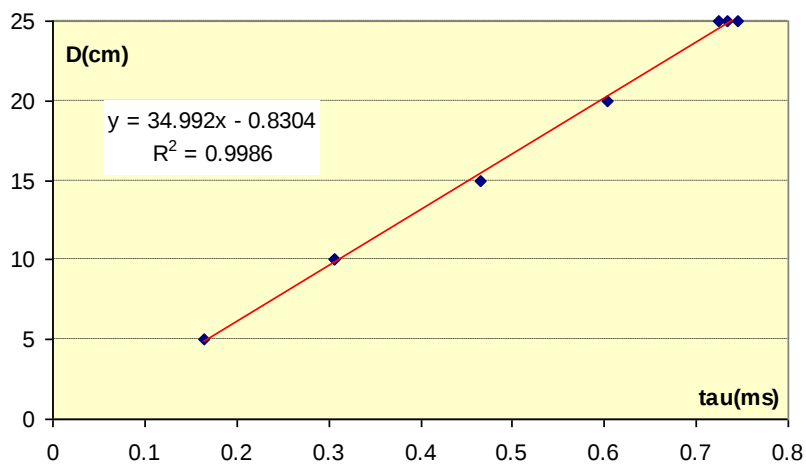


Ecranul inițial



Remarcă butonul verde (stânga-jos) apăsat (Running).

Grafic



$$v = \Delta D / \Delta \tau (\Delta y / \Delta x) = 349.9 \text{ m/s}$$

Tau(ms) D(cm)

0.1638 5

0.3066 10

0.3065 10

0.4651 15

0.6025 20

0.7455 25

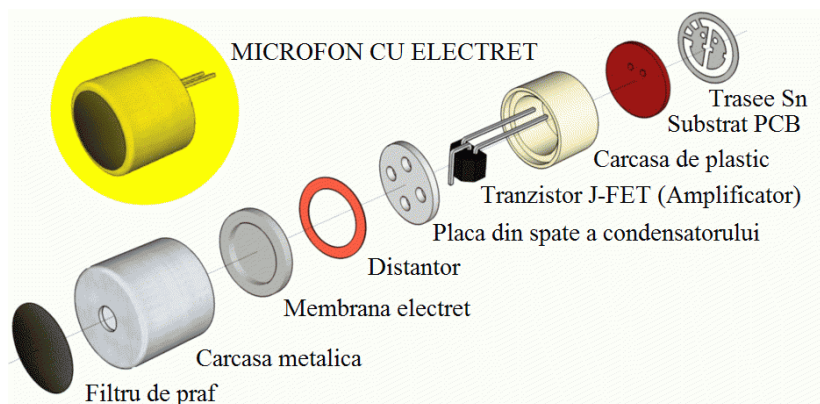
0.72402 25

0.73383 25

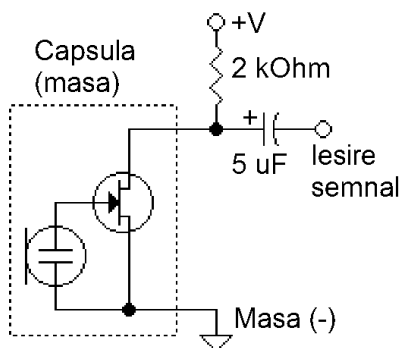
Microfonul cu electret



Aspect exterior



Structura unui microfon cu electret



Schema de utilizare

FLUIDE

Mecanica fluidelor studiază corpurile care nu au formă proprie, altfel spus corpurile care curg. În această categorie intră gazele și lichidele, diferența dintre ele fiind aceea că lichidele au un volum propriu, pe câtă vreme gazele nu au volum propriu, ele umplu incinta în care se află.

Există și alte sisteme care pot fi studiate cu metodele mecanicii fluidelor cum ar fi materialele pulverulente (nisip sau pulberi) sau chiar traficul rutier.

Statica fluidelor

Presiunea statică.

Noțiunea de presiune este asociată de obicei fluidelor, lichide sau gaze. Presiunea " p " e definită ca forța " F ", *perpendiculară* pe suprafață, divizată cu aria suprafeței " A ", sau forța pe suprafața unitate:

$$p = \frac{F}{A} \text{ unitate de măsură } [p]_{SI} = \text{N/m}^2 \text{ (Pa, Pascal)} \quad (1)$$

Datorită greutateii lichidului dintr-un recipient în punctul P (fig. 1) aflat la adâncimea " h " se crează **presiunea hidrostatică**:

$$p = G/A = \rho \cdot g \cdot h \cdot A/A = \rho \cdot g \cdot h \quad (2)$$

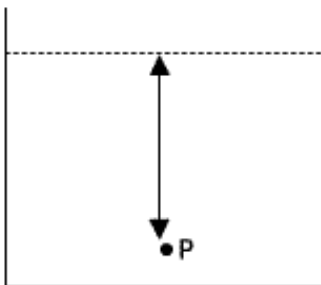


Figura 1. Presiunea în orice punct dat într-un lichid închis este determinată de densitatea lichidului și de distanța de la punctul dat la suprafață.

unde: h = distanța de la suprafață la punct;

g = accelerația gravitațională ($9,81 \text{ m/s}^2$)

$\rho = m/V$ (densitate = masa /volum) $[\rho]_{SI} = \text{kg/m}^3$. (3)

Pentru deducerea formulei ne-am folosit de faptul că forța de greutate este:

$$G = m \cdot g$$

iar masa de lichid aflată deasupra punctului P se determină ca:

$$m = \rho \cdot V = \rho \cdot h \cdot A$$

Astfel densitatea lichidului determină presiunea p exercitată la o adâncime dată. Mercurul, care este de 13,63 ori mai dens decât apa ($\rho_{\text{apa}} = 1000 \text{ kg/m}^3$), va exercita o presiune de 13,63 ori mai mare decât apa la aceeași adâncime față de suprafața liberă.

Notă! Relația se poate fi folosi pentru a determina nivelul lichidului dintr-un recipient măsurând presiunea la baza recipientului. Înălțimea coloanei de lichid se va calcula cu formula:

$$h = p / (\rho \cdot g) \quad (4)$$

Exemplu. La baza unui turn de apă se măsoară o presiune de 54 kPa. Știind densitatea apei $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, înălțimea coloanei de apă va fi:

$$h = p / (\rho \cdot g) = 54 \cdot 10^3 / (1000 \cdot 9.8) = 5.51 \text{ m}$$

Denivelarea coloanei de lichid dintr-un tub în formă de "U" este utilizată pentru măsurarea presiunilor relative (față de presiunea atmosferică) cu *manometrul cu lichid* folosind relația (2), $p = \rho \cdot g \cdot h$. În partea dreaptă a tubului în formă de "U" presiunea atmosferică care acționează pe suprafața lichidului se însumează cu presiunea datorată nivelului coloanei de lichid, la adâncimea H , vezi figura 2. În partea stângă a tubului, la același nivel, acționează pe suprafața liberă doar presiunea " p ". Din egalarea celor 2 presiuni, din stânga și din dreapta la același nivel:

$$p = p_{\text{atm}} + \rho \cdot g \cdot H$$

găsim presiunea relativă:

$$p - p_{\text{atm}} = \rho \cdot g \cdot H$$

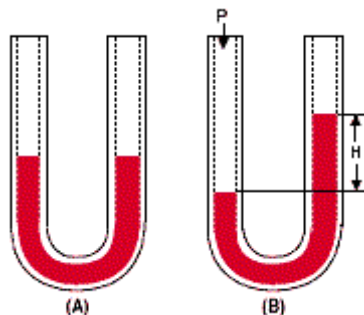


Figura 2. Manometrul cu lichid

Exemplu. Suflând în partea stângă a manometrului producem o denivelare de 25 cm, coloană de apă. Presiunea generată este:

$$p - p_{\text{atm}} = \rho \cdot g \cdot H = 1000 \cdot 9.8 \cdot 25 \cdot 10^{-2} = 2450 \text{ Pa}$$

Formula barometrică

Gazele diferă de lichide din două puncte de vedere: sunt foarte compresibile și umplu complet vasul închis în care sunt plasate. Variația neliniară cu altitudinea a presiunii aerului, arătată în figura 3a este un exemplu al efectului compresibilității gazelor. Sub formă diferențială relația presiunii hidrostatice (2) pentru aer este (apare "–" fiindcă "h" e înălțime, nu adâncime):

$$dp = -\rho \cdot g \cdot dh \quad (5)$$

Din *ecuația termică de stare* a aerului aflăm densitatea aerului:

$$p \cdot V = R \cdot T \cdot m/M \Rightarrow p = \rho \cdot R \cdot T/M \Rightarrow \rho = p \cdot M / (R \cdot T) \quad (6)$$

Înlocuind densitatea " ρ " în relația (5) găsim modul în care variază presiunea cu înălțimea:

$$dp/p = -dh \cdot M \cdot g/(R \cdot T) \Rightarrow \ln(p/p_0) = -M \cdot g \cdot h/(R \cdot T) \quad (7)$$

Formula presiuni atmosferice în funcție de altitudine va fi:

$$p = p_0 \cdot e^{-M \cdot g \cdot h/(R \cdot T)} \quad (8)$$

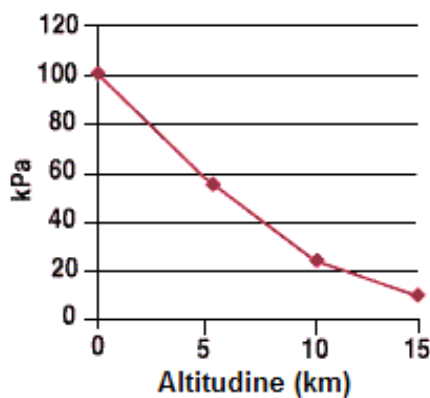


Figura 3a. Compresibilitatea gazelor este ilustrată prin presiunea aerului ca funcție neliniară de altitudine.

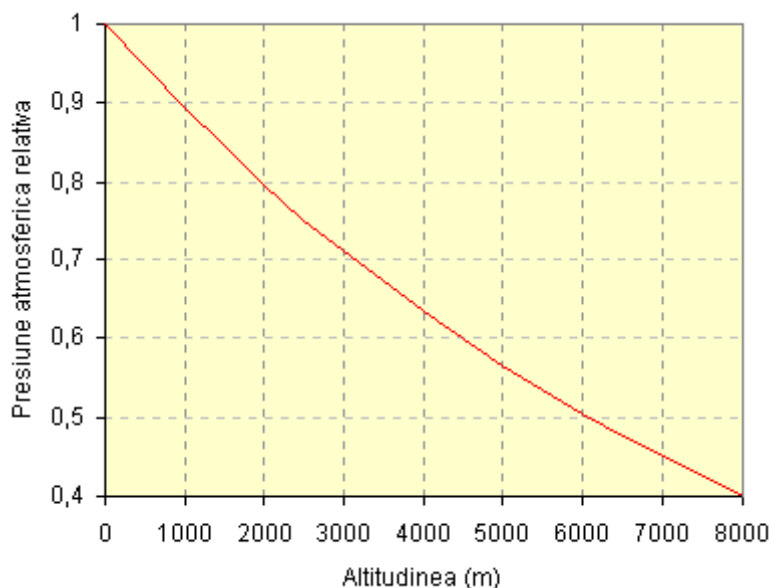


Figura 3b. Presiunea atmosferică relativă în funcție de altitudine calculată cu relația (8')

unde: R – constanta universală a gazelor ($8310 \text{ J}/(\text{kmol} \cdot \text{K})$)
 T – temperatura gazului în grade Kelvin ($T=273+t \text{ (}^\circ\text{C)}$)
 M – masa molară (pentru aer $\sim 29 \text{ kg}/\text{kmol}$)
 p_o – $p_{\text{atmosferică}}$ la nivelul mării ($h=0$, $p_o=101 \text{ kPa}$)

Folosind constantele numerice date și o temperatură de 27°C putem calcula mărimea:

$$h' = R \cdot T / (M \cdot g) = 8763 \text{ m}$$

și presiunea atmosferică relativă " p/p_o " ca funcție de altitudine:

$$p/p_o = e^{-h/h'} \quad (8')$$

Atmosfera standard $H(\text{m}) = 8000 \cdot \lg(p_o/p)$; $\Delta t = -6,5^\circ\text{C}/1000\text{m}$

Altitudine (m)	p/p_o	ρ/ρ_o	$t \text{ (}^\circ\text{C)}$
0	1	1	15
1000	0,887	0,907	8,5
2000	0,784	0,822	2
3000	0,692	0,742	-4,5
4000	0,608	0,669	-11
5000	0,533	0,601	-17,5
6000	0,465	0,538	-24
7000	0,405	0,481	-30,5
8000	0,351	0,428	-37
9000	0,303	0,381	-43
10000	0,261	0,337	-50

Legea lui Arhimede. Plutirea corpurilor

Principiul lui Arhimede: un corp cufundat parțial sau total într-un lichid, este împins în sus de o forță egală cu greutatea lichidului dezlucuit. Pe suprafața de sus a corpului paralelipipedic cu aria bazei A și înălțimea L , cufundat într-un container cu lichid (figura 4), se exercită o forță descendentă:

$$F_1 = p_{\text{sus}} \cdot A = \rho \cdot g \cdot h \cdot A \quad (9)$$

iar pe suprafața de jos se exercită forța ascendentă:

$$F_2 = p_{\text{jos}} \cdot A = \rho \cdot g \cdot (h+L) \cdot A \quad (10)$$

Forța rezultantă:

$$F_A = F_2 - F_1 = \rho \cdot g \cdot A \cdot L \quad (11)$$

este egală cu greutatea lichidului dezlucuit, fiindcă produsul " $A \cdot L$ " reprezintă volumul corpului și deci volumul lichidului dezlucuit, care apoi e înmulțit cu densitatea lichidului și accelerația gravitațională.

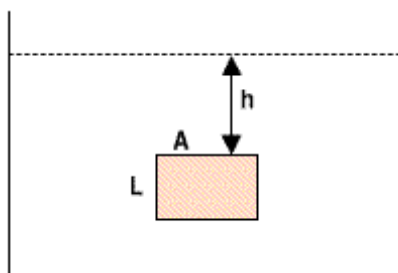


Figura 4. Principiul lui Arhimede: un obiect cufundat într-un lichid e împins spre suprafață de greutatea lichidului dezlucuit.

Un corp cufundat total într-un lichid simte 2 forțe principale, greutatea, $G=mg$, și forța arhimedică $F_A = \rho \cdot V_c \cdot g$, unde ρ e densitatea lichidului, iar V_c este volumul corpului. Forța totală pe care o va simți corpul va fi o *greutate aparentă* G_a :

$$G_a = G - F_A = mg - \rho \cdot V_c \cdot g = (\rho_c - \rho) V_c g \quad (12)$$

unde ρ_c este densitatea corpului. Cântărind un corp în aer și în apă putem afla densitatea sa și astfel rezolvăm antica problemă a lui Arhimede: dacă coroana regelui conține proporția corectă de aur și argint.

Într-un lichid practic nu apar forțe de forfecare, iar transmiterea presiunii lichidului se face perpendicular pe suprafața vasului în care se află. Fenomenul se vede cu ușurință prin găurirea containerului cu apă și observând cursul jetului prin orificiu (figura 5). Jetul va țâșni întotdeauna perpendicular pe peretele vasului. Acest fapt este important în construcția barajelor (digurilor) ce trebuie să reziste forței apei. Peretele barajului nu este vertical în partea dinspre apă, are o pantă care face ca presiunea apei să genereze o forță înclinată în jos, sporind stabilitatea construcției.

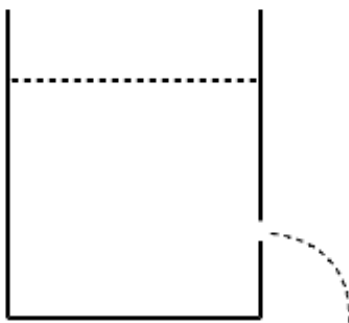


Figura 5. Presiunea lichidului este normală la suprafață, după cum se observă în urma perforării vasului.

Problemă

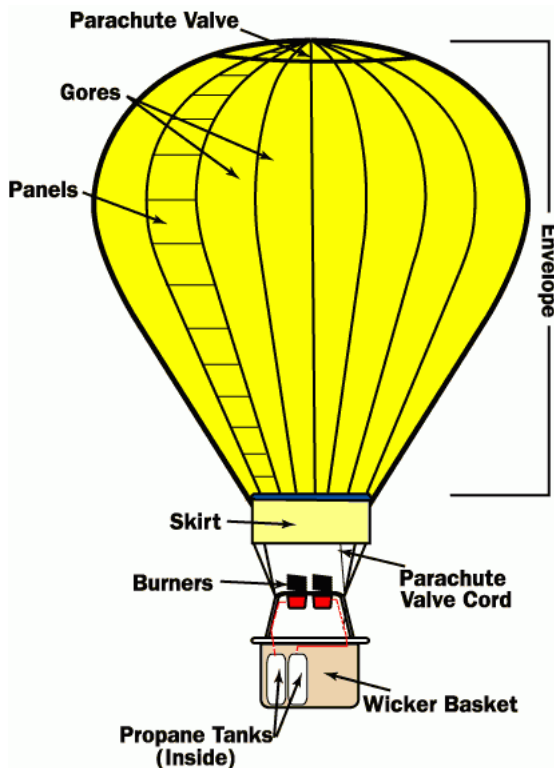
Un corp paralelipipedic cu $L=25\text{cm}$, $l=10\text{cm}$, $h=5\text{cm}$ și densitatea $d=800\text{kg/m}^3$ este așezat în apă $d_a=1000\text{kg/m}^3$.

- Ce volum rămâne în aer?
- În ce poziție va avea stabilitatea maximă?
[când e minimă energia potențială]

Balonul cu aer cald

Sursa principală: http://en.wikipedia.org/wiki/Hot_air_balloon

Un aparat de zbor care utilizează forța arhimedică este balonul cu aer cald, creat în 1782 de frații Montgolfier. Părțile sale componente sunt: balonul propriu-zis, sursa de căldură (arzătorul cu propan, uzual) și nacela (gondola sau coșul) în care stau oamenii. De menționat că principiul de zbor era cunoscut de chinezi (anul 220-280, lanternele Kongming) și fusese prezentat în 1709 regelui portughez de Bartolomeu de Gusmão.



Structura unui balon cu aer cald

Un balon cu aer cald este realizat din țesătură de nylon sau dacron (poliester), impermeabilizată cu silicon sau poliuretan. Lângă arzător, balonul este realizat dintr-un material rezistent la temperaturi ridicate (Nomex, o aramidă (plastic), din familia Kevlar-ului). Temperatura aerului cald e limitată la maximum 120°C. În condiții atmosferice normale (20°C), un volum de 4 m³ de aer la 99°C ridică circa un kilogram (generează o forță ascensională corespunzătoare greutății unei mase de 1kg).

Din *ecuația termică de stare* (6) a aerului găsim cum depinde de temperatură densitatea aerului la presiune constantă:

$$\rho = pM/(RT) = (T_0/T) pM/(RT_0) = \rho_0 T_0/T \quad (13)$$

Forța ascensională generată de aerul cald apare ca o diferență între greutatea aerului rece (ρ_0) dezlocuit (forța Arhimedică) și greutatea aerului cald (ρ):

$$\begin{aligned} F_{\text{ascens}} &= F_{\text{Arh}} - G = \\ &= \rho_0 Vg - \rho Vg = (\rho_0 - \rho) Vg = (1 - T_0/T) \rho_0 Vg \end{aligned} \quad (14)$$

Când este mai ușor de zburat cu balonul, când e rece sau când e cald afară?

Tabel:

Masa ridicată de 1000 m³ de aer în funcție de temperatura lui (1000 m³ sferă cu raza $R \approx 6.2\text{m}$, pentru 500 m³ $R \approx 4.92\text{m}$).

Temperatura aerului	Densitatea aerului	Masa aerului	Masa ridicată
20°C	1.2041 kg/m ³	1204.1 kg	0 kg
99 °C	0.9484 kg/m ³	948.4 kg	255.7 kg
120 °C	0.8977 kg/m ³	897.7 kg	306.4 kg

Putem genera o forță ascensională mai mare dacă în loc de aer cald folosim un gaz ușor ca hidrogenul ($\rho = 0.090 \text{ kg/m}^3$, $M = 2 \text{ kg/kmol}$, *inflamabil!*) sau mai bine heliul ($\rho = 0.179 \text{ kg/m}^3$, $M = 4 \text{ kg/kmol}$) care nu este inflamabil. Folosind *ecuația termică de stare* (6) se arată simplu că raportul densităților a 2 gaze este dat de raportul maselor lor molare (în aceleași condiții de presiune și temperatură):

$$\rho/\rho_o = M/M_o = 4/29 \text{ (heliu/aer)} \quad (15)$$

De menționat că baloanele cu aer cald au un volum mare, chiar și cele pentru o singură persoană, fără coș ("Cloudhoppers" sau "Hoppers"), au un volum de circa 600 m^3 (sferă cu rază $>5\text{m}$).



Legea lui Pascal. Transmiterea presiunii

Legea lui Pascal prevede că dacă există o creștere a presiunii pe o porțiune din suprafața lichidului, atunci o creștere identică va exista în orice alt punct din acel lichid. Acest principiu este utilizat în cazul sistemelor hidraulice cum ar fi cricurile și

frânele hidraulice ale automobilelor sau presa hidraulică. Este echivalentul fluidic al principiului pârghiei, care produce forțe mari folosind deplasări mari cu pistoane mici ce mișcă pistoane mari pe distanțe mici (figura 6).

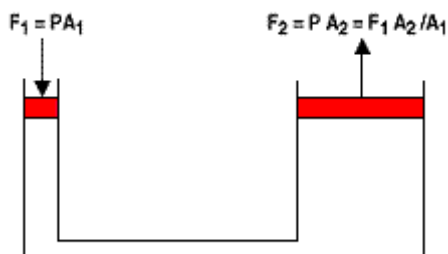


Figura 6. Potrivit legii lui Pascal, o creștere a presiunii pe suprafața lichidului determină o creștere similară în orice alt punct din acel lichid.

Presiunea este aceeași în tot lichidul:

$$p = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \quad \text{consecință} \quad F_2 = F_1 \frac{A_2}{A_1} \quad (16)$$

Din relația (16) și din conservarea volumului de lichid:

$$A_1 \cdot x_1 = A_2 \cdot x_2 \Rightarrow \frac{A_2}{A_1} = \frac{x_1}{x_2} \quad (17)$$

găsim că *energia se conservă*, adică lucrul mecanic efectuat de pistonul mic (din stânga) este egal cu lucrul mecanic efectuat de pistonul mare (cel din dreapta):

$$F_1 \cdot x_1 = F_2 \cdot x_2 \quad (18)$$

Putem spune că un astfel de dispozitiv hidraulic funcționează ca o pârghie: forța mică aplicată pistonului mic generează o forță mare pe pistonul mare, dar deplasările sunt invers proporționale cu forțele.

Distribuția Boltzmann (temă de nivel avansat)

Presiunea atmosferică "p" variază cu înălțimea "h" după legea:

$$p = p_0 \cdot e^{-M \cdot g \cdot h / (R \cdot T)} \quad (1)$$

unde: p_0 – presiunea atmosferică la nivelul mării ($h=0$);
 g – accelerația gravitațională;
 h – altitudinea;
 M – masa molară a gazului;
 R – constanta universală a gazelor [$8310 \text{ J} / (\text{kmol} \cdot \text{K})$]
 T – temperatura absolută a gazului (grade Kelvin).

Din teoria cinetico-moleculară a gazelor presiunea este:

$$p = (2/3) n m \langle v^2 \rangle / 2 = (2/3) n (3/2) k \cdot T = n \cdot k \cdot T \quad (2)$$

unde: n -numărul de molecule din unitatea de volum
 m -masa unei molecule,
 $m=M/N_A$, masa molară/număr Avogadro
 $\langle v^2 \rangle$ -viteza pătratică medie a moleculelor;
 k -constanta Boltzmann [$k = R/N_A$].

În condiții izoterme, din relația (1) folosim relația (2) găsim:

$$n = n_0 \cdot e^{-mgh / (kT)} \quad (3)$$

unde: n_0 – este densitatea de particule la $h=0$, iar
 n – densitatea de particule la înălțimea h .

Dacă ne închipuim că până acum am lucrat cu un gaz închis într-un cilindru foarte înalt de înălțime h și modificăm forma cilindrului făcându-l foarte plat, înălțime mică și suprafață mare, fără a-i modifica volumul și nici temperatura gazului atunci formula (3) poate fi scrisă ca:

$$n = n_0 \cdot e^{-W / (kT)} \quad (4)$$

unde W este de data asta energia unei molecule. Formula (4) dedusă de Boltzmann mult mai riguros spune câte molecule din gaz au energia W și dă **distribuția moleculelor după energie**.

Dinamica fluidelor ideale

Ecuția de continuitate

La fluidele incompresibile, în primul rând lichidele, dar în multe cazuri și gazele, *conservarea masei* este echivalentă cu *conservarea volumului*: cât fluid intră pe o parte a conductei, tot atât iese. Aplicăm acest principiu pentru două secțiuni prin conductă și un interval de timp Δt :

$$V_1 = V_2. \Rightarrow S_1 \cdot v_1 \cdot \Delta t = S_2 \cdot v_2 \cdot \Delta t \quad (1)$$

simplificând cu Δt obținem **ecuația de continuitate**:

$$S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2 \quad (2)$$

Această relație ne spune că **debitul volumic**, Q_v (volumul de fluid ce trece prin secțiunea transversală de arie "S" a conductei în unitatea de timp) rămâne constant de-a lungul conductei, iar mai general de-a lungul unui tub de curent:

$$Q_v = \Delta V / \Delta t = S \cdot v = \text{const.} \quad (3)$$

Legea lui Bernoulli

Presiunea fluidelor în mișcare. Datorită energiei cinetice a fluidului în mișcare, pe orice suprafață perpendiculară pe direcția de curgere se exercită o presiune, *presiunea dinamică* (sau *presiunea de impact*) p_d :

$$p_d = \rho \cdot v^2 / 2 \quad (4)$$

unde ρ este densitatea fluidului și v este viteza fluidului.

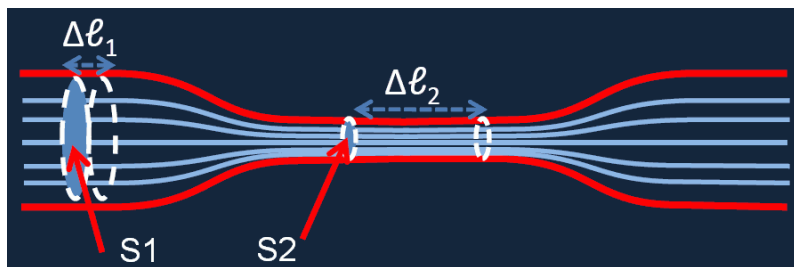
Existența presiunii dinamice și relația ei cu celelalte presiuni se deduce pe baza teoremei variației energiei cinetice, aplicată fluidului. Delimităm o porțiune din fluid prin intermediul a

două secțiuni transversale de arie S_1 și S_2 . Asupra acestui corp fluid acționează forțele F_1 și F_2 (normale pe S_1 și S_2) create de presiunile p_1 și p_2 ($F=pS$). Deplasarea punctului lor de aplicație este respectiv $\Delta \ell_1 = v_1 \cdot \Delta t$ și $\Delta \ell_2 = v_2 \cdot \Delta t$, unde " v_i " este viteza fluidului prin secțiunea S_i , iar Δt este intervalul de timp (mic, infinitesimal) în care se face observația. Lucrul mecanic care este efectuat asupra corpului fluid va fi:

$$\Delta L = F \cdot \Delta \ell = (p_1 S_1 v_1 - p_2 S_2 v_2) \cdot \Delta t \quad (5)$$

Deplasarea staționară a fluidului prin conductă este echivalentă cu înlocuirea porțiunii $S_1 v_1 \cdot \Delta t$ cu porțiunea $S_2 v_2 \cdot \Delta t$ și de aceea variația de energie cinetică va fi:

$$\begin{aligned} \Delta E_c &= E_{c2} - E_{c1} = \\ &= (\rho S_2 v_2 \cdot \Delta t \cdot v_2^2 / 2 - \rho S_1 v_1 \cdot \Delta t \cdot v_1^2 / 2) \end{aligned} \quad (6)$$



Ținând cont de faptul că $\Delta L = \Delta E_c$ (teorema variației energiei cinetice) și de ecuația de continuitate, $S_i v_i = \text{const.}$, obținem **legea** (teorema, ecuația) **lui Bernoulli**:

$$p_1 + \rho v_1^2 / 2 = p_2 + \rho v_2^2 / 2 \quad (7)$$

Legea lui Bernoulli, dedusă din teorema variației energiei cinetice, aici echivalentă cu conservarea energiei mecanice, e echivalentă cu următoarea relație între presiuni pentru curgerile orizontale:

$$p_t = p_s + p_d = \text{constantă} \quad (8)$$

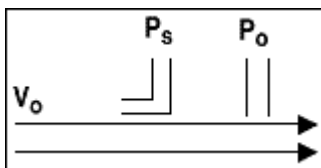
unde: p_t = presiunea totală;
 p_s = presiunea statică,
 p_d = presiunea dinamică.

Când curgerea are o deplasare de nivel (înălțime) intervine și lucrul mecanic al forței de greutate (presiunea hidrostatică) și relația (8) devine:

$$p_t = p_s + \rho gh + \rho v^2/2 = \text{constantă} \quad (9)$$

Cu relația (9) rearanjată se poate determina viteza curgerii unui fluid, lucru util în multe aplicații:

$$v = [2 \cdot (p_t - p_s) / \rho]^{1/2} \quad (10)$$



Aranjament experimental folosit pentru măsurarea vitezei fluidului în mișcare (tub Pitot).

Tubul care este orientat pe direcția de curgere a fluidului va simți presiunea totală, statică și dinamică, iar tubul orientat pe direcția perpendiculară pe direcția de curgere măsoară doar presiunea statică. Această abordare este folosită în aplicațiile din tehnica vidului și mai ales în aviație pentru a măsura viteza de deplasare a avioanelor. Din viteza de curgere " v " se poate determina *debitul volumic* Q_v (volumul de fluid ce trece prin secțiunea transversală de arie " S " a unei conducte în unitatea de timp) din relația:

$$Q_v = V/\Delta t = S \cdot v \quad (11)$$

O problemă utilă (în cât timp se atinge viteza limită)

Un corp este acționat de o forță constantă (forța de greutate) $G=mg$ și o forță de frânare $F_r = kv^2$ proporțională cu pătratul vitezei. Găsiți legea vitezei și a spațiului.

R. Aplicăm legea forței $F=ma$:

$$ma = mg - kv^2 \quad \Rightarrow \quad a \cdot (m/k) = (mg/k) - v^2,$$

Viteza maximă (limită) se atinge când $a=0$ ($\Sigma F=0$)

$$v^2 = mg/k$$

Notăm viteza maximă a corpului când $a=0$ cu v' :

$$mg/k = v'^2,$$

de unde:

$$(dv/dt) (m/k) = v'^2 - v^2 = (v' - v)(v' + v)$$

Separăm variabilele v și t :

$$\Rightarrow \quad dv/[(v' - v)(v' + v)] = (k/m) \cdot dt$$

și ținând cont de relația matematică:

$$1/[(v' - v)(v' + v)] = [1/(v' - v) + 1/(v' + v)] / (2v')$$

putem scrie că:

$$dv/(v' - v) + dv/(v' + v) = dt (2v'k/m)$$

Introducând notația " τ " pentru *constanta de timp* caracteristică mișcării:

$$\tau = m/(2v'k) = (1/2) \cdot [m/(g \cdot k)]^{1/2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{gk}}$$

avem:

$$\int dv/(v' - v) + \int dv/(v' + v) = \int dt / \tau$$

După integrare cu condiția inițială $v = 0$ la $t = 0$, avem:

$$\ln[(v'-v)/(v'+v)] = -t/\tau$$

exponențiind avem: $\Rightarrow (v'-v)/(v'+v) = e^{-t/\tau}$

Rearanjând obținem: $\Rightarrow v(t) = v' \cdot (1 - e^{-t/\tau}) / (1 + e^{-t/\tau})$

$$v(t) = v' \cdot \frac{1 - e^{-\frac{t}{\tau}}}{1 + e^{-\frac{t}{\tau}}} = v' \cdot \frac{1 - e^{-t/\tau}}{1 + e^{-t/\tau}}$$

Numărătorul " $1 - e^{-t/\tau}$ " tinde la 1, plecând de la valoarea 0 la $t=0$, iar numitorul " $1 + e^{-t/\tau}$ " tinde la 1, plecând de la valoarea 2 pentru $t=0$. Calculăm valorile acestor termeni pentru câteva rapoarte dintre t și τ ($t/\tau=1,2,3,4$):

$$e^{-1} = 0,368 ; 1 - e^{-1} = 0,632 = 63 \% ; 1 + e^{-1} = 1,3678$$

$$e^{-2} = 0,135 ; 1 - e^{-2} = 0,864 = 86 \% ; 1 + e^{-2} = 1,135$$

$$e^{-3} = 0,049 ; 1 - e^{-3} = 0,950 = 95 \% ; 1 + e^{-3} = 1,049$$

$$e^{-4} = 0,018 ; 1 - e^{-4} = 0,982 = 98 \% ; 1 + e^{-4} = 1,018$$

Din aceste valori tragem concluzia că după 3 constante de timp τ , mobilul atinge practic viteza sa limită v' (eroare de $\sim 5\%$), mișcându-se în continuare uniform.

Această forță de frânare este caracteristică mișcării obiectelor cu viteză mare într-un fluid, de exemplu pentru autovehicule și avioane mișcându-se în aer. Presiunea dinamică ce acționează asupra secțiunii mobilului, transversală pe direcția de curgere a fluidului este:

$$p_{\text{din}} = \rho \cdot v^2 / 2$$

unde:

ρ – densitatea fluidului, $1,21 \text{ kg/m}^3$ pentru aer la 20°C ,
 v – viteza relativă fluid-solid.

Presiunea dinamică crează o forță de frânare:

$$F_r = K \cdot S \cdot \rho \cdot v^2 / 2 = kv^2 \quad (k = K \cdot S \cdot \rho / 2)$$

unde S este aria **secțiunii mobilului** perpendiculară pe direcția de curgere (*transversală*), iar K este *coeficientul aerodinamic* ce depinde de forma obiectului.

Coeficientul aerodinamic pentru câteva forme uzuale

$K = 1,2$	$\Rightarrow)$	semisferă concavă
$K = 1$	$\Rightarrow $	plan
$K = 0,4$	$\Rightarrow O$	sferă
$K = 0,3$	$\Rightarrow ($	semisferă convexă
$K = 0,2$	$\Rightarrow <>$	"glonț"
$K = 0,04$	$\Rightarrow \subset$	"picătură", profil aripă de avion

Probleme de mecanica fluidelor ideale

Un parașutist cu masa $m=80\text{kg}$ se mișcă sub acțiunea greutateii ($g=9,81\text{ m/s}^2$) și a unei forțe rezistente proporțională cu pătratul vitezei $F_r=-k\cdot v^2$, $k=100\text{kg/m}$. Aflați:

- viteza maximă pe care o poate atinge;
- timpul după care atinge 90% din viteza maximă.

Calculați suprafața parașutei ($c_x=1$) ce limitează viteza de cădere la 2m/s , masei $m=13\text{kg}$ dacă frânează doar presiunea dinamică? ($g=9.8\text{ m/s}^2$, $\rho_{\text{aer}}=1.3\text{kg/m}^3$)

R.

$$mg = c_x S \rho v^2 / 2 \Rightarrow S = 2mg / (\rho v^2) = 2 \cdot 13 \cdot 10 / (1.3 \cdot 2^2) = 50\text{ m}^2.$$

Automobilul care are coeficientul aerodinamic $c_x=0.3$ și dimensiunile $H=1.51\text{ m}$, $\ell=2\text{ m}$, $L=3\text{ m}$, e frânat doar de presiunea dinamică a aerului ($\rho_{\text{aer}}=1.3\text{kg/m}^3$). Ce putere dă motorul la viteza maximă $v=180\text{ km/h}$? (W și CP)

R

$$F_t = P/v \quad F_r = c_x \cdot H \ell \cdot \rho v^2 / 2 \quad \text{la } v_{\max} \quad v = \text{const.} \Rightarrow \sum F = 0 \Rightarrow$$

$$F_t = F_r \Rightarrow$$

$$P = Fv = c_x H \ell \rho v^3 / 2 = 0.3 \cdot 2 \cdot 1.51 \cdot 1.3 \cdot 50^3 / 2 = 73'612.5 \text{ W} = 100 \text{ CP}$$

Un automobil are masa $m = 1\,000 \text{ kg}$, dimensiunile $H=1\text{m}$, $\ell=2\text{m}$, $L=4\text{m}$, puterea motorului $P=100\text{CP}$ ($1\text{CP}=736\text{W}$), viteza maximă pe drum orizontal $v=216$ (144) km/h.

Considerând că frânează mișcarea doar forța aerodinamică (densitatea aerului $d=1,3 \text{ kg/m}^3$), aflați:

- forța de tracțiune la viteza maximă;
- coeficientul aerodinamic al automobilului;
- forța de rezistență aerodinamică la 72 km/h;
- în cât timp atinge viteza de 108 km/h fără frecări, pornind din repaus și utilizând puterea maximă.
- în condițiile de la punctul d calculați viteza la momentele $t=0, 1, 2, 4, 9 \text{ s}$ și reprezentați grafic viteza în funcție de timp.

Rezolvare

$$v_{\max} = 144 \text{ sau } 216 \text{ km/h} = 40 \text{ sau } 60 \text{ m/s}$$

$$\text{a) } F_t = P/v = 100 \cdot 736 / 40 = 1840 \text{ N}$$

$$\text{a) } F_t = P/v = 100 \cdot 736 / 60 = 1227 \text{ N}$$

$$F_t = F_r \text{ și } F_r = c_x H \ell \cdot d v^2 / 2 \Rightarrow$$

$$\text{b) } c_x = 2F_t / (H \ell d v^2) = 2 \cdot 1840 / (2 \cdot 1 \cdot 1,3 \cdot 40^2) = 0,885$$

$$\text{b) } c_x = 2F_t / (H \ell d v^2) = 2 \cdot 1227 / (2 \cdot 1 \cdot 1,3 \cdot 60^2) = 0,262$$

$$F_2 / F_1 = v_1^2 / v_2^2 \Rightarrow$$

$$\text{c) } F_2 = F_1 v_1^2 / v_2^2 = 1840 \cdot (20/40)^2 = 460 \text{ N}$$

$$\text{c) } F_2 = F_1 v_1^2 / v_2^2 = 1227 \cdot (20/60)^2 = 136 \text{ N}$$

$$\text{d) } P t = m v^2 / 2 \Rightarrow t = m v^2 / (2P) = 1000 \cdot 30^2 / (2 \cdot 100 \cdot 736) = 6,11 \text{ s}$$

$$e) v = (2Pt/m)^{1/2} = (2P/m)^{1/2} \cdot t^{1/2} = 12,1 \cdot t^{1/2}$$

0; 12,1; 17,1; 24,3; 36,4;

Un automobil are masa $m = 1\,000\text{ kg}$, dimensiunile $H=1\text{m}$, $\ell=2\text{m}$, $L=4\text{m}$, puterea motorului $P=100\text{CP}$, viteza maximă pe drum orizontal $v=144\text{ km/h}$ ($1\text{CP}=736\text{W}$). Considerând că frânează mișcarea doar forța aerodinamică (densitatea aerului $d=1,3\text{ kg/m}^3$), aflați:

- coeficientul aerodinamic al automobilului;
- puterea consumată și lucrul mecanic efectuat de forța aerodinamică asupra automobilului la viteza de 72 km/h pe distanța de 108 km ;
- același lucru dacă viteza este de 144 km/h ;
- în cât timp atinge viteza de 108 km/h fără frecări, pornind din repaus.

Măsurarea presiunii

- **Presiunea absolută** este măsurată față de vid. Un exemplu în acest sens îl constituie presiunea atmosferică.
- **Presiunea diferențială** este diferența de presiune dintre 2 puncte de măsură (vezi tubul Pitot).
- **Presiunea relativă** este măsurată relativ la presiunea ambiantă. Tensiunea arterială este unul dintre exemple.

Același senzor de presiune se poate utiliza în toate cele 3 moduri, diferind doar presiunea de referință. Presiunea diferențială poate fi măsurată în orice domeniu peste, sub sau în jurul presiunii atmosferice.

Alte unități de presiune

Presiunea este forța pe unitatea de suprafață, iar pentru ea s-au folosit multe tipuri de unități, după cât de potrivite cu aplicația erau. De exemplu tensiunea arterială este de regulă măsurată în mmHg (milimetri coloană de mercur), datorită faptului că inițial se utilizau manometrele cu mercur. Din aceleași motive presiunea atmosferică se exprimă de obicei în mmHg (=Torr) sau în in.Hg. Alte unități de măsură folosite pentru presiunea atmosferică sunt: bar-ul ($1 \text{ bar} = 100'000 \text{ Pa}$) *atmosfera tehnică* (at.) și *atmosfera fizică* (atm.).

Următoarele formule de transformare (conversii) ajută la înțelegerea diferitelor unități de măsură:

$$1 \text{ atm} = 760 \text{ mmHg} = 14,696 \text{ psi} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa (N/m}^2\text{)}$$

$$1 \text{ at} = 1 \text{ kgf/cm}^2 = 1 \text{ bar} = 14,504 \text{ psi} = 0,981 \cdot 10^5 \text{ Pa (N/m}^2\text{)}$$

$$1 \text{ psi} = 51,714 \text{ mmHg} = 2,0359 \text{ in.Hg} = 27,680 \text{ in. H}_2\text{O} = 6,8946 \text{ kPa}$$

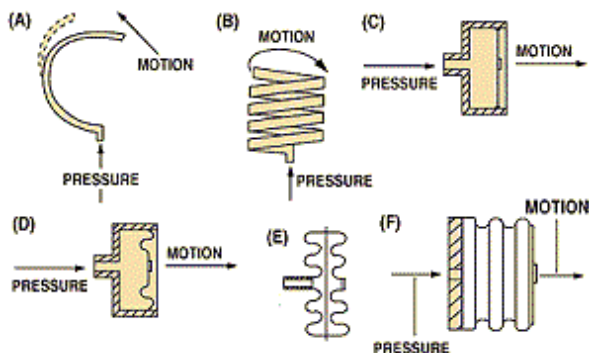
psia – presiunea absolută în livre (pounds) pe țol (inci) pătrat (psi = **p**ounds **p**er **s**quare **i**nch).

psid – presiunea diferențială în psi (**p**ounds **p**er **s**quare **i**nch).

psig – presiunea relativă în livre pe țol pătrat.

Traductoare de presiune

Presiunea este măsurată cu elemente mecanice elastice: plăci, membrane, tuburi, proiectate și construite să se deformeze când este aplicată presiunea. Acest mecanism (traductor) transformă presiunea în deplasare fizică care este afișată ca atare sau este și ea transformată într-o mărime de ieșire electrică. În final este necesară prelucrarea semnalului în funcție de tipul senzorului și de aplicație, și afișarea lui. Principalele tipuri de elemente sensibile la presiune sunt: tuburile Bourdon, diafragmele, capsulele și membranele (vezi figura alăturată).



Elementele de bază sesizoare de presiune pot fi configurate ca (A) tub Bourdon în formă de C; (B) tub Bourdon elicoidal; (C) diafragmă plată; (D) diafragmă gofrată; (E) capsulă sau (F) tub gofrat (silfon).

Tubul Bourdon este un tub sigilat, curbat, care se întinde sau strânge ca răspuns la presiunea aplicată. Toate, cu excepția diaframelor, dau o deplasare destul de mare, folosite în aparatele de măsurat mecanice și pentru senzorii electrici care cer o deplasare semnificativă.

La **aparatele mecanice de măsurare a presiunii** mișcarea creată de elementul sensibil este citită de un cadran (indicator). Aceste procedee se folosesc uzual în aplicații de performanță joasă, incluzând măsurarea tensiunii arteriale și aparatele de măsurat presiunea în pneuri. Cuplajul mecanic al senzorului la sistemul de afișare poate introduce erori de repetabilitate. Masa elementelor mecanice în mișcare din aparatele de măsură limitează răspunsul în frecvență, acești senzori utilizându-se doar pentru măsurarea presiunilor care se schimbă lent.

Senzorii de presiune electromecanici transformă presiunea aplicată într-un semnal electric. Se folosesc materiale și tehnologii diverse în aceste procedee, pentru creșterea performanțelor, scăderea costului și compatibilizarea cu aplicația. Semnalul electric de la ieșire oferă multe posibilități

de utilizare în aplicații diferite. Dezvoltarea extraordinară a tehnologiilor microelectronice a făcut posibil ca astăzi să avem senzori de presiune extrem de mici, cu performanțe deosebite și la un preț infim, față de cei mecanici.

Efectele dinamice. Presiunea statică este măsurată în condiții de echilibru sau în condiții staționare, dar în aplicațiile reale apar presiuni variabile în timp, dinamice. De exemplu la măsurarea tensiunii arteriale se obțin două valori staționare, presiunea sistolică și diastolică. O mare varietate de informații pot fi obținute din forma semnalului tensiunii arteriale în funcție de timp. Din acest motiv sunt folosite monitoarele de presiune sanguină în urgențele medicale.

Pentru a măsura presiuni variabile în timp, trebuie luat în considerare *răspunsul în frecvență* al senzorului. Aproximând grosier, răspunsul în frecvență al senzorului ar trebui să fie 5 – 10 mai mare decât componenta cu cea mai mare frecvență din semnalul presiunii. Răspunsul de frecvență este definit ca fiind cea mai mare frecvență pe care senzorul o va măsura fără nici o distorsiune sau atenuare. Este util **timul de răspuns** care într-un sistem de ordinul unu se află în următoarea relație cu frecvența de răspuns:

$$f_B = \pi \cdot \tau / 2$$

unde:

- f_B = frecvența unde răspunsul scade la jumătate (50 %);
- τ = constanta de timp, timpul în care mărirea de ieșire crește la 63% din valoare ei finală, când i se aplică un semnal treaptă al mărimii de intrare.

Alt aspect se referă la măsurarea de la distanță a presiunii, unde este utilizat un mediu lichid de legătură. Trebuie avut grijă ca tot aerul să fie evacuat (purjat), deoarece compresibilitatea lui va vicia forma de undă a semnalului.

Aplicații Industriale

Nivelul fluidului dintr-un recipient.

O joă de presiune poziționată să măsoare presiunea relativă la fundul unui recipient poate fi folosită pentru a indica la distanță nivelul fluidului din rezervor folosind relația:

$$h = P / (\rho \cdot g)$$

Debitul fluidului.

O diafragmă cu orificiu, plasată într-o secțiune a conductei, crează o cădere de presiune. Această metodă este des folosită pentru a măsura fluxul, deoarece căderea de presiune este mică în comparație cu alte tipuri de măsurare a fluxului și pentru că este imună la obturare, problemă deranjantă în mediu vâscos sau care conține particule în suspensie. Relația utilizată este:

$$\text{Viteza de curgere} = v = [2 \cdot (P_{\text{total}} - P_{\text{static}}) / \rho]^{1/2}$$

În unele cazuri se măsoară presiuni diferențiale de câțiva centimetri coloană de apă la presiuni ale fluidului de sute de atmosfere. Acești senzori de presiune sunt astfel construiți pentru a nu se deteriora datorată presiunii de mod comun.

Aplicații ale măsurării presiunii la automobile

Există o mare varietate de aplicații ale măsurării presiunii în automobilele moderne controlate electronic.

Presiunea la admisie (Manifold Absolute Pressure MAP).

Multe sisteme de control al motorului folosesc pentru măsurarea fluxului masic de aer de la admisia în motor determinarea densității și vitezei aerului. Fluxul masic trebuie știut pentru a injecta cantitatea optimă de combustibil. MAP este utilizat în conjuncție cu temperatura aerului de la intrare pentru a calcula densitatea aerului. Este necesar un senzor de presiune în domeniul 15 psia sau mai mult (la motoare supraalimentate sau turboalimentate). Este de dorit includerea

unei corecții de altitudine în sistemul de control care necesită măsurarea presiunii barometrice absolute (BAP). Unele sisteme folosesc un senzor separat, dar este mai simplu ca senzorul MAP să îndeplinească o funcție dublă de vreme ce el citește presiunea atmosferică în 2 condiții: înainte de a începe motorul să funcționeze și când clapeta de accelerație este larg deschisă.

Presiunea uleiului din motor.

Ungerea motorului necesită o presiune de 10-15 psig. Pompa de ulei este dimensionată să atingă această presiune la relanti, presiunea crescând odată cu turația motorului. Presiunea de ulei e măsurată de o joă potențiometrică sau un întrerupător sensibil la presiune, pentru această funcție nefiind necesară o precizie mare.

Detectia pierderilor din rezervorul de combustibil.

Rezervoarele moderne de combustibil, nu sunt ventilate (evacuate) în atmosferă pentru a reduce scurgerile și poluarea. Vaporii de benzină din rezervorul de combustibil, rezultați din schimbările de presiune induse de schimbările de temperatură, sunt captați într-un absorbant din carbon și ulterior reciclați prin motor. Regulile guvernului american cer ca scurgerile în acest sistem să fie monitorizate de un sistem aflat la bord. O abordare constă în crearea unei suprapresiuni în sistem și măsurarea descreșterii presiunii într-un interval de timp fixat. Un senzor de 1 psig este folosit pentru această funcție.

Presiunea anvelopei.

Recenta descoperire a cauciucului "run-flat" a grăbit dezvoltarea sistemului de măsurare de la distanță a presiunii în anvelope. Motivul este că un cauciuc dezumflat de acest gen, este dificil de detectat vizual și distanța pe care poate fi folosit fără presiune este limitată.

FLUIDE VÂSCOASE

Vâscozitatea unui fluid este dată de frecarea dintre straturile de fluid. Cel mai corect spus este vorba de *transferul de impuls* de la un strat la altul *transversal* (perpendicular) pe strat. Imaginea care ne ajută este cea a unui top de hârtie din care extragem o foaie de hârtie. Foaia extrasă antrenează foaile adiacente care le antrenează pe următoarele și așa mai departe.

Forța de rezistență datorită vâscozității este proporțională cu suprafața de contact dintre cele două straturi, S , și cu gradientul vitezei (cât de rapid se modifică viteza de la un strat la altul), dv/dr . Relația care descrie fenomenul este:

$$F_r = \eta \cdot S \cdot dv/dr \quad (1)$$

unde η este *coeficientul de vâscozitate dinamică* al fluidului:

$$[\eta]_{SI} = N \cdot s / m^2 = kg / (m \cdot s) \quad (2)$$

$\eta_{aer} = 1,81 \cdot 10^{-5} \text{ kg/(m} \cdot \text{s)}$ la 20°C și $2,18 \cdot 10^{-5} \text{ kg/(m} \cdot \text{s)}$ la 100°C
(vâscozitatea gazelor crește ușor cu creșterea temperaturii)

$\eta_{apa} = 1,002 \cdot 10^{-3} \text{ kg/(m} \cdot \text{s)}$ la 20°C și $0,283 \cdot 10^{-3} \text{ kg/(m} \cdot \text{s)}$ la 100°C

$\eta_{ulei} = 9,8 \cdot 10^{-1} \text{ kg/(m} \cdot \text{s)}$ la 20°C și $1,7 \cdot 10^{-2} \text{ kg/(m} \cdot \text{s)}$ la 100°C

$\eta_{glicerina} = 2,33 \text{ kg/(m} \cdot \text{s)}$ la 25°C

(vâscozitatea lichidelor scade mult cu creșterea temperaturii).

Curgerea Poiseuille

Curgerea Poiseuille. Avem un tub de rază R și lungime L .

Forța de frecare internă pe suprafața cilindrului de rază r este:

$$F_i = \eta \cdot S \cdot dv/dr = \eta \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot L \cdot dv/dr \quad (3)$$

Diferența de presiune dintre capetele tubului crează forța ce învinge forța de frecare:

$$\pi \cdot r^2 \cdot \Delta p = -\eta \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot L \cdot dv/dr \quad (4)$$

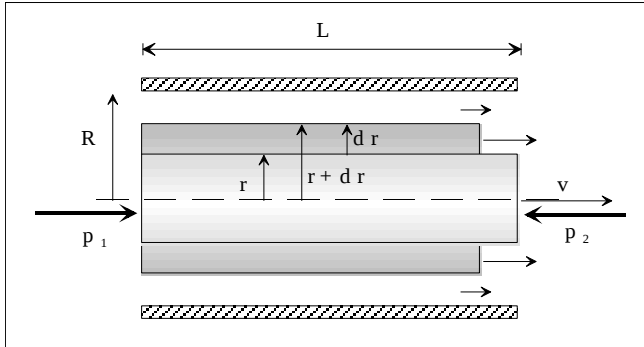


Figura 1. Curgerea laminară în conducte (curgere Poiseuille).

care după separarea variabilelor și integrare devine:

$$v(r) = (R^2 - r^2) \cdot \Delta p / (4 \cdot \eta \cdot L) = v_{\max} \cdot (1 - r^2/R^2) \quad (5)$$

$$v_{\max} = R^2 \cdot \Delta p / (4 \cdot \eta \cdot L) \quad (6)$$

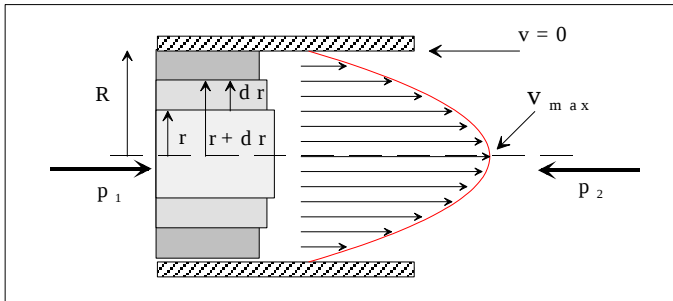


Figura 2. Distribuția vitezelor straturilor de fluid în tubul capilar.

Viteza este maximă în centrul tubului (\$r=0\$) și scade la zero după o lege parabolică către pereții tubului (\$r=R\$).

Debitul volumic (\$Q=Sv\$) va fi dat de **legea Hagen și Poiseuille**:

$$Q = \int v \, dS = \int v_{\max} (1 - r^2/R^2) 2\pi r \, dr = \pi R^4 \Delta p / (8\eta L) \quad (7)$$

Se poate defini o "rezistență fluidică" a conductei, similar cu ce avem în electricitate, ca raportul dintre tensiune, aici căderea de presiune Δp , și curent, aici debitul Q :

$$R_f = \Delta p / Q = 8\eta L / (\pi R^4) \quad (8)$$

Rezistența la curgere este proporțională cu raza conductei la puterea "-4". Adică o dublare a razei va micșora rezistența de 16 ori!

Legea lui Stokes

Un fluid, **datorită vâscozității**, exercită asupra unui corp în mișcare o forță de frânare (rezistență la înaintare) dată de **legea lui Stokes**:

$$F_v = 3 \cdot \pi^{1/2} \cdot S^{1/2} \cdot \eta \cdot v \quad (9)$$

unde S este *suprafața corpului spălată de fluid*. Pentru o sferă în mișcare în fluid vâscos, fiindcă $S=4\pi r^2$, relația devine mai simplă:

$$F_v = 6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r \cdot v \quad (10)$$

O sferă din puf va fi mai puternic frânată decât o sferă netedă de aceeași dimensiune geometrică, fiindcă firele fine din puf vor crea o suprafață mult mai mare decât suprafața geometrică.

Datorită presiunii dinamice a fluidului $p_{\text{dynam}} = \rho \cdot v^2 / 2$ asupra unui corp care se deplasează în fluid acționează forța de rezistență dinamică:

$$F_d = C_d \cdot S \cdot \rho \cdot v^2 / 2 \quad (11)$$

unde ρ este densitatea fluidului, iar C_d este *coeficientul aerodinamic* (un număr, este adimensional), tabelat mai jos pentru câteva situații tipice.

Corpul din fluid	Proporția	$\Re$	C_d
Placă dreptunghiulară (a, b)	a/b=	1 8 25 50 ∞	1,16 1,23 1,57 1,76 2,00
Cilindru	L/d=	1 2 4 7	0,91 0,85 0,87 0,99
Disc circular $\Rightarrow $			1,11
Semisferă convexă $\Rightarrow ($			0,41
Semisferă concavă $\Rightarrow)$			1,35
Con plin $\Rightarrow \blacktriangleleft$	$\alpha=$	60° 30°	0,51 0,34

Forța de rezistență totală din partea fluidului va fi:

$$F_r = F_{\text{visc}} + F_{\text{din}} = 6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r \cdot v + C_d \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \rho \cdot v^2 / 2 \quad (12)$$

Raportul $F_{\text{din}} / F_{\text{visc}}$ ne spune ce forțe contează în situația dată și conține un număr adimensional, **numărul Reynolds**:

$$Re = \rho \cdot v \cdot r / \eta \quad (13)$$

Valoarea numărului Reynolds determină tipul de curgere a fluidului pe lângă corpurile imersate în fluid sau prin conducte. Curgerea este laminară la valori ale numărului Reynolds $Re < 100$, iar pentru $Re > 1000$ curgerea este turbulentă.

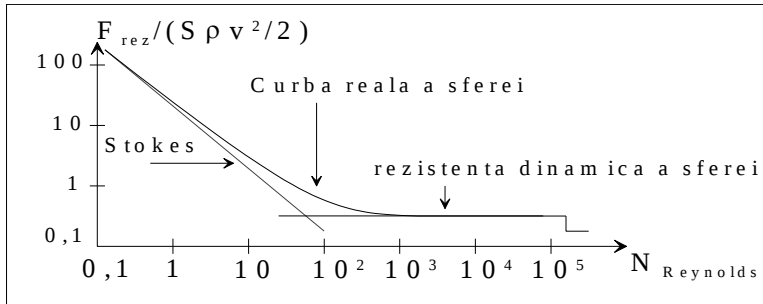


Figura 3. Forța de rezistență exercitată asupra unei sfere ce se mișcă într-un fluid în funcție de numărul Reynolds.

O problemă utilă (în cât timp se atinge viteza limită)

Un corp este acționat de o forță constantă (forța de greutate) $G=mg$ și o forță de frânare $F_r = kv$ proporțională cu viteza. Găsiți legea vitezei și a spațiului.

R. Aplicăm legea forței :

$$ma = mg - kv \Rightarrow$$

$$dv/dt = g - v \cdot k/m = (k/m)[(mg/k) - v]$$

Viteza maximă (limită) se atinge când $a=0$

$$v' = mg/k$$

Notăm $\tau = m/k$. Separăm variabilele v și t și integrăm:

$$\int dv/(v' - v) = \int \tau \cdot dt$$

$$\Rightarrow -\ln(v' - v) + \ln C = t/\tau$$

Punând condiția inițială $v = 0$ la $t = 0$, avem

$$\ln C = \ln(mg/k)$$

și exponențiind avem:

$$v(t) = v' \cdot (1 - e^{-t/\tau})$$

Știind că : $e^{-1} = 0,3678$; $1 - e^{-1} = 0,632 = 63\%$
 $e^{-2} = 0,135$; $1 - e^{-2} = 0,864 = 86\%$
 $e^{-3} = 0,0498$; $1 - e^{-3} = 0,950 = 95\%$
 $e^{-4} = 0,018$; $1 - e^{-4} = 0,982 = 98\%$

tragem concluzia că după 3 constante de timp τ , mobilul atinge practic viteza sa limită v' , mișcându-se în continuare uniform.

Frânarea proporțională cu viteza e caracteristică mișcării corpurilor cu viteză mică în fluide vâscoase. Forța de frânare a unei sfere de rază r și densitate ρ , care se mișcă cu viteza v , într-un fluid de densitate ρ' și coeficient de vâscozitate η ($[\eta]_{SI} = \text{kg}/(\text{s} \cdot \text{m}) = \text{Ns}/\text{m}^2$) este:

$$f = 6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r \cdot v \quad (\text{legea lui Stokes})$$

La limită, când sfera se mișcă uniform sub acțiunea forței de greutate, a forței arhimedice orientată în sens contrar gravitației și a forței de frânare, avem egalitatea:

$$6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r \cdot v' = (4/3) \pi r^3 g (\rho - \rho')$$

din care putem deduce coeficientul de vâscozitate η măsurând viteza limită v' :

$$\eta = 2g(\rho - \rho')r^2 / (9v')$$

Exemple numerice.

1) Care este viteza limită a unei picături de ploaie (apă) $r=1\text{mm}$ sau $0,0001\text{mm}$? ($\rho_{\text{aer}}=1,2 \text{ kg}/\text{m}^3$, $\eta_{\text{aer}}=1,8 \cdot 10^{-5} \text{ kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$)

1. Care este viteza limită datorită forței de rezistență vâscoasă?
2. Care este viteza limită datorită forței de rezistență dinamică?
3. Ce determină viteza limită a picăturilor de ploaie, rezistența dinamică sau vâscozitatea? Cât este numărul Reynolds?

4. În cât timp și pe ce distanță se atinge viteza limită?

5. Dar în cazul grindinei cu $r=2\text{mm}$?

Rezolvare (indicații)

Neglijăm forța arhimedică fiindcă $\rho_{\text{apa}} \gg \rho_{\text{aer}}$ ($1000 \gg 1,2$).

Rezistența vâscoasă:

$$G = F_v \Rightarrow \rho_{\text{apa}} V g = 6\pi \eta_{\text{aer}} R v$$

$$V = 4\pi R^3/3 \Rightarrow$$

$$v = 2\rho_{\text{apa}} R^2 g / (9\eta_{\text{aer}}) = 1,234 \cdot 10^8 \cdot R^2 \Rightarrow$$

$$v = 1,234 \cdot 10^2 \text{ m/s } (R=1\text{mm})$$

$$v = 1,234 \cdot 10^{-6} \text{ m/s } (R=0,0001\text{mm})$$

Rezistența dinamică:

$$G = F_d \Rightarrow \rho_{\text{apa}} V g = S \rho_{\text{aer}} v^2 / 2$$

$$V = 4\pi R^3/3; S = \pi R^2 \Rightarrow$$

$$v = [2\rho_{\text{apa}} 4\pi R^3 g / (3\pi R^2 \rho_{\text{aer}})]^{1/2}.$$

$$v = [8\rho_{\text{apa}} R g / (3\rho_{\text{aer}})]^{1/2} = (2222 \cdot R)^{1/2} \text{ m/s}$$

$$v = 1,49 \text{ m/s } (R=1\text{mm})$$

$$v = 1,49 \cdot 10^{-2} \text{ m/s } (R=0,0001\text{mm})$$

Cea mai mică dintre cele două viteze (frânare dinamică sau vâscoasă) indică procesul de frânare cel mai important. De ce?

2) Ce viteză limită are bila de rulment, $\rho_{\text{fier}}=7870 \text{ kg/m}^3$, $r=2\text{mm}$, în ulei cu densitatea $\rho_{\text{ulei}}=0,9 \text{ g/cm}^3$ și vâscozitatea $\eta_{\text{ulei}}=0,9 \text{ kg/(m}\cdot\text{s)}$ sau în apă cu $\rho_{\text{apa}}=1000 \text{ kg/m}^3$, $\eta_{\text{apa}}=1,8 \cdot 10^{-3} \text{ kg/(m}\cdot\text{s)}$. Estimați timpul și distanța pe care se atinge v_{lim} . Cât este numărul Reynolds? [Forța arhimedică nu este neglijabilă aici!]

3) Un om suportă o cădere liberă de la 2m. Ce diametru trebuie să aibe cupola parașutei ca omul cu $m=100\text{kg}$ să aibe în aer viteza limită a căderii libere de la 2m? Considerați atât cazul frânării vâscoase cât și cel al frânării dinamice. Se cunosc $\rho_{\text{aer}}=1,3\text{ kg/m}^3$, $\eta_{\text{aer}}=1,8\cdot 10^{-5}\text{ kg/(m}\cdot\text{s)}$, $C_d=1$, $g=10\text{m/s}^2$. În cât timp și pe ce distanță se atinge viteza limită?

4) Știind că pentru o conductă cilindrică numărul $Re=2200$ separă curgerea laminară de cea turbulentă, aflați viteza corespunzătoare acestui număr pentru raze ale conductei de $r_1 = 1\text{mm}$ și $r_2 = 1\text{cm}$. (apă și aer).

$$\eta_{\text{aer}} = 1,8\cdot 10^{-5}\text{ kg/(m}\cdot\text{s)}, \rho_{\text{aer}}=1,3\text{ kg/m}^3;$$

$$\eta_{\text{apa}} = 1\cdot 10^{-3}\text{ kg/(m}\cdot\text{s)}, \rho_{\text{apa}}= 1000\text{ kg/m}^3.$$

a) Ce cădere de presiune apare pe o conductă de aer comprimat cu lungimea 1km și diametrul 2cm la un debit de $1\text{m}^3/\text{min}$.? Dar pentru apă?

5) Ce putere consumă forța aerodinamică ce acționează asupra automobilului cu masa $m = 1\,000\text{ kg}$, dimensiunile $H=1,5\text{m}$, $l=2\text{m}$, $L=4\text{m}$ și coeficientul aerodinamic $C=0,4$, la viteza de 18, 36, 54, 72, 90, 108, 126, 144 km/h? Faceți graficul puterii "P" în funcție de viteza "v". ($\rho_{\text{aer}} = 1,2\text{ kg/m}^3$)

Probleme de mecanica fluidelor vâscoase

1.

Un parașutist cu masa 80kg se mișcă sub acțiunea greutății ($g=9,81\text{ m/s}^2$) și a unei forțe rezistente proporțională cu viteza: $F_r = -k\cdot v$, $k = 100\text{ N}\cdot\text{s/m}$ (kg/s). Aflați:

- viteza maximă pe care o poate atinge;
- timpul după care atinge 90% din viteza maximă.

2.

O seringă cu volumul de 50 ml are un ac cu diametrul interior $d=0,2\text{ mm}$ și lungimea $L=5\text{ cm}$ și diametrul pistonului $D=2\text{ cm}$.

Știind că se apasă asupra pistonului cu forța $F=30\text{N}$, coeficientul de vâscozitate $\eta_{\text{aer}}=1,8 \cdot 10^{-5} \text{ kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$ și densitatea $\rho_{\text{aer}}=1,3 \text{ kg}/\text{m}^3$, aflați:

- căderea de presiune pe ac (diferența de presiune între capete);
- denivelarea Δh a coloanei de apă a unui manometru cu tub în formă de "U" legat între capetele acului [$\rho_{\text{apa}}=1000 \text{ kg}/\text{m}^3$, $g=9,81\text{m}/\text{s}^2$];
- în cât timp se golește seringă;
- în cât timp se golește seringă umplută cu apă [$\eta_{\text{apa}}=1 \cdot 10^{-3} \text{ Ns}/\text{m}^2$];
- viteza cu care iese jetul de apă din ac.

3.

O conductă cilindrică cu raza interioară $r=1\text{cm}$ și lungimea $L=1\text{km}$ este parcursă de debitul de aer $D=1\text{m}^3/\text{minut}$. Știind coeficientul de vâscozitate $\eta_{\text{aer}}=1,8 \cdot 10^{-5} \text{ kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$ și densitatea $\rho_{\text{aer}}=1,2 \text{ kg}/\text{m}^3$, aflați:

- diferența de presiune dintre capetele conductei;
- denivelarea Δh a coloanei de apă a unui manometru cu tub în formă de "U" legat între capetele conductei [$\rho_{\text{apa}}=1000 \text{ kg}/\text{m}^3$];
- căderea de presiune dacă conducta ar fi parcursă de apă. [$g=9,81\text{m}/\text{s}^2$. $\eta_{\text{apa}}=1 \cdot 10^{-3} \text{ kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$]

4.

O seringă cu volumul de 50 ml are un ac cu diametrul interior $d=1 \text{ mm}$ și lungimea $L=5 \text{ cm}$ și diametrul pistonului $D=2 \text{ cm}$. Știind coeficientul de vâscozitate $\eta_{\text{apa}}=1 \cdot 10^{-3} \text{ kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$, densitatea $\rho_{\text{apa}}=10^3 \text{ kg}/\text{m}^3$ și că se apasă asupra pistonului cu forța $F=31,4 \text{ N}$, aflați:

- presiunea din seringă;
- denivelarea Δh a coloanei de apă a unui manometru cu tub în formă de "U" legat între seringă și atmosferă [$g=9,81\text{m}/\text{s}^2$];

- c) debitul cu care iese apa din seringă în m^3/s și ml/s ;
 d) în cât timp se golește seringă.

R.

$$a) p = F/S = 31,4 / (3,14 \cdot 10^{-4}) = 10^5 \text{ Pa}$$

$$b) h = p / (\rho_{\text{apa}} \cdot g) = 10^5 / (10^3 \cdot 9,81) = 10,2 \text{ m}$$

$$c) Q = \pi R^4 p / (8 \eta L) =$$

$$= 3,14 \cdot 5^4 \cdot 10^{-4} \cdot 10^5 / (8 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-2}) = 4,91 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s} = 49,1 \text{ ml/s}$$

$$d) t = V/Q = 1,02 \text{ s}$$

5.

În cât timp se va limpezi apa tulbure cu adâncimea de $h=1\text{m}$ în care se află în suspensie particule de praf cu densitatea $\rho=3000\text{kg/m}^3$ și diametrul $D=0.2\text{mm}$, dacă frânează doar forța de vâscozitate? ($\eta_{\text{apa}} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ kg/(m}\cdot\text{s)}$, $g=10\text{m/s}^2$)

Rezolvare

$$r = D/2 = 0,1 \text{ mm} = 10^{-4} \text{ m}$$

$$G - F_A = F_v \Rightarrow (4\pi r^3/3)(\rho - \rho_{\text{apa}})g = 6\pi \eta r v \Rightarrow$$

$$v = 2gr^2(\rho - \rho_{\text{apa}})/(9\eta) =$$

$$= 2 \cdot 10 \cdot 10^{-8} \cdot (3000 - 1000) / (9 \cdot 10^{-3}) = 4.44 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$$

$$t = h/v = 1 / 4.44 \cdot 10^{-2} = 22,5 \text{ s}$$

6.

O seringă cu 20 ml de apă, cu diametrul pistonului $D=1 \text{ cm}$, are un ac cu diametrul interior $d=0.2 \text{ mm}$ și lungimea $L=3 \text{ cm}$.

Știm densitatea $\rho_{\text{apa}}=1000\text{kg/m}^3$ și vâscozitatea apei $\eta_{\text{apa}}=1 \cdot 10^{-3} \text{ kg/(m}\cdot\text{s)}$. Aflați:

a. forța ce acționează asupra pistonului pentru a o goli în 10 secunde;

b. viteza cu care iese apa din ac (m/s și km/h).

Rezolvare

$$r=d/2=0,1\text{mm}=10^{-4}\text{m},$$

$$R=D/2=0,5\text{cm}=5\cdot 10^{-3}\text{m},$$

$$V=20\text{ml}=20\cdot 10^{-6}\text{ m}^3.$$

a. $Q_v=V/t=\pi r^4 p/(8\eta L) \Rightarrow$

$$p=8\eta L V/(t\pi r^4)=$$

$$=8\cdot 10^{-3}\cdot 3\cdot 10^{-2}\cdot 20\cdot 10^{-6}/(10\cdot 3.14\cdot 10^{-16})=1,53\cdot 10^6\text{ Pa}$$

$$F=pS=\pi R^2\cdot p=3.14\cdot 25\cdot 10^{-6}\cdot 1,53\cdot 10^6=120\text{ N}$$

sau

$$F=pS = R^2\cdot 8\eta L V/(t r^4)=$$

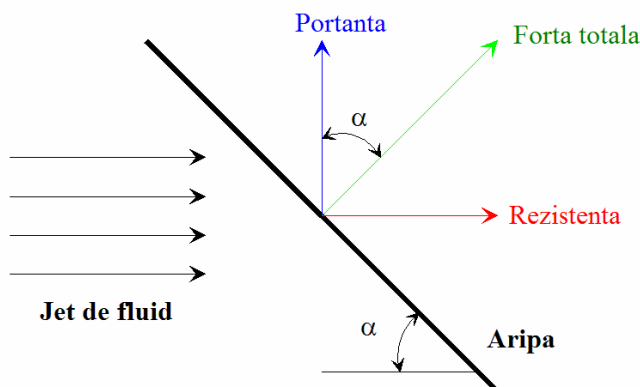
$$=25\cdot 10^{-6}\cdot 8\cdot 10^{-3}\cdot 3\cdot 10^{-2}\cdot 20\cdot 10^{-6}/(10\cdot 10^{-16})=1.2\cdot 10^2\text{ N}$$

b. $Q_v=V/t=Sv= \pi r^2\cdot v \Rightarrow$

$$v=V/(t\pi r^2)=20\cdot 10^{-6}/(10\cdot 3.14\cdot 10^{-8})=63.7\text{ m/s}=229\text{ km/h}$$

ARIPA DE AVION

Un plan face unghiul α cu orizontala. Asupra sa acționează un jet de aer orizontal cu viteza v . La ce unghi este maximă forța verticală de ascensiune? Ce suprafață are o aripă care susține o masă $M=100$ kg la viteza orizontală de 36 km/h (10m/s) pentru un unghi optim?



Un jet de fluid generează o forță perpendiculară pe suprafața care i se opune. Această forță are o componentă ascensională (verticală) și o componentă de frânare (orizontală).

Explicație folosind presiunea dinamică.

Perpendicular pe direcția de curgere a aerului suprafața ce o "vede" jetul de aer este:

$$S = A \cdot \sin \alpha \quad (1)$$

iar perpendiculară pe suprafața A este forța dinamică creată de curgerea aerului, având expresia

$$F_d = A \sin \alpha \rho v^2 / 2 \quad (2)$$

Componenta verticală a forței dinamice, cea care ridică, forța de sustentație (*lift*) sau forța de ascensiune (*portanța*) se obține

prin descompunerea forței dinamice după cele două direcții, cea verticală și cea orizontală, conform figurii și este:

$$F_v = F_d \cos\alpha = A \sin\alpha \cos\alpha \rho v^2/2 \quad (2)$$

sau

$$F_v = [\sin(2\alpha)/2] [A \rho v^2/2] \quad (3)$$

Din această relație se găsește că valoarea maximă a sustentației este la unghiul $\alpha=45^\circ$ când $\sin(2\alpha)=1$.

Pentru a ridica o masă M e necesar ca forța portantă să egaleze greutatea:

$$Mg = A \rho v^2 \cdot \sin(2\alpha)/4 \quad (4)$$

De aici găsim aria necesară ca fiind:

$$A = 4Mg / [\rho v^2 \cdot \sin(2\alpha)] \quad (5)$$

Numeric:

$$A = 4 \cdot 100 \cdot 10 / [1,2 \cdot 10^2] = 100/3 = 33,3 \text{ m}^2$$

Componenta orizontală a forței dinamice crează o forță de rezistență (*drag* în engleză):

$$F_r = F_o = F_d \sin\alpha = A \cdot \sin^2\alpha \cdot \rho v^2/2 \quad (6)$$

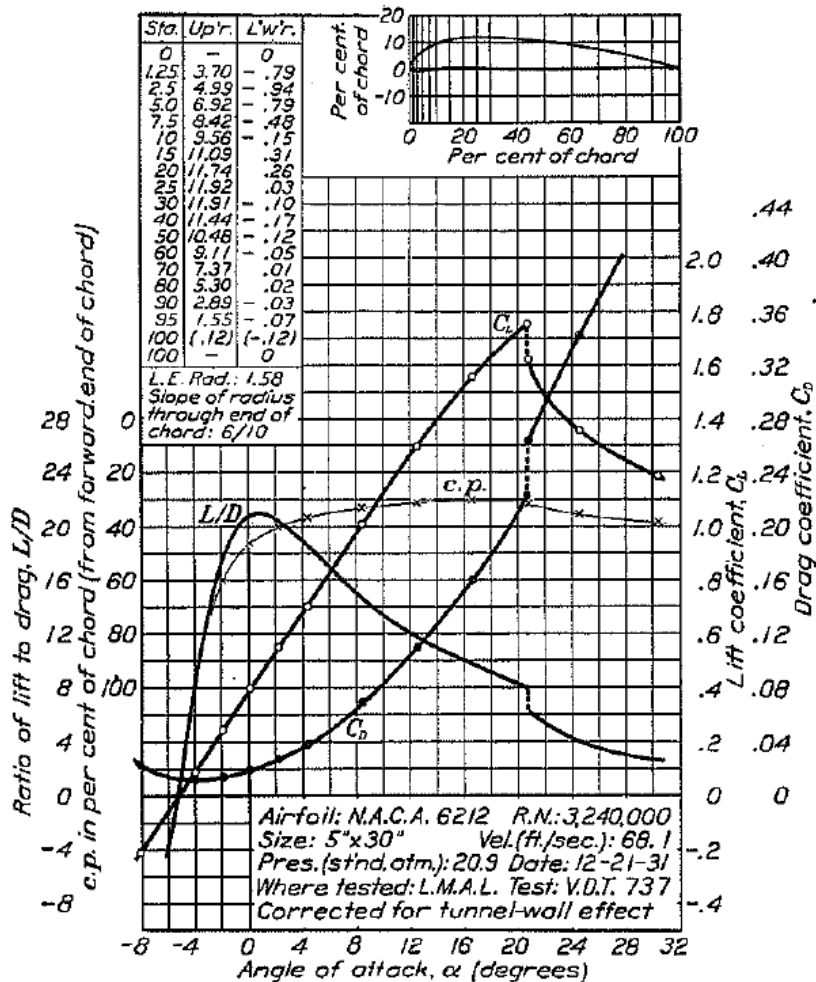
În literatura de specialitate sustentația și rezistența unui anumit profil de aripă (*airfoil* în engleză) se caracterizează prin **coeficientul de sustentație** (*lift coefficient*) C_L și **coeficientul de rezistență** (*drag coefficient*) definite ca:

$$C_L = F_L / [A \cdot \rho v^2/2] \quad \text{uzual } \sim 1.5 \text{ la } 15^\circ \quad (7)$$

$$C_D = F_D / [A \cdot \rho v^2/2] \quad \sim 0.01 \text{ la } 0^\circ \text{ unghi de atac} \quad (8)$$

unde A este aria aripii (proiecția în plan orizontal). Din relația (3) $C_L=1/2$ la 45° , iar din măsurători experimentale ~ 1.5 la 15° .

DE CE apare această discrepanță între experiment și teorie?

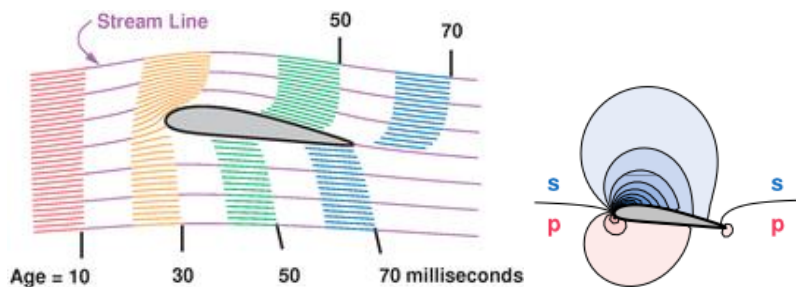


Coeficienții reali de sustentație (*lift*) și rezistență (*drag*) la un profil de aripă dat (tabel și imaginea din dreapta sus a figurii)

Explicație folosind legea lui Bernoulli.

Forma profilului de aripă determină aerul să circule cu viteză mare în partea de sus a aripii și cu o viteză mai mică în partea de jos a aripii. Din această cauză, conform principiului lui

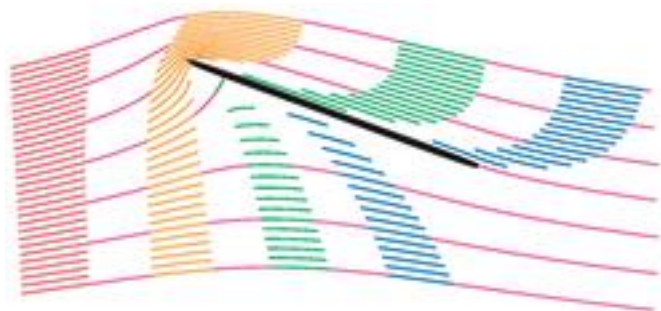
Bernoulli, în partea de sus a aripii avem o presiune statică mai mică decât cea din partea de jos a aripii, ceea ce va genera o forță de sustentatie, o forță verticală orientată în sus.



Mișcarea aerului și distribuția presiunii lângă o aripă

Sursa: <http://www.av8n.com/how/htm/airfoils.html>

Chiar și o simplă placă, neprofilată, este capabilă să genereze acest fenomen, conform figurii alăturate. Liniile colorate arată evoluția în timp a porțiunilor de aer marcate periodic cu fum (aerosoli).

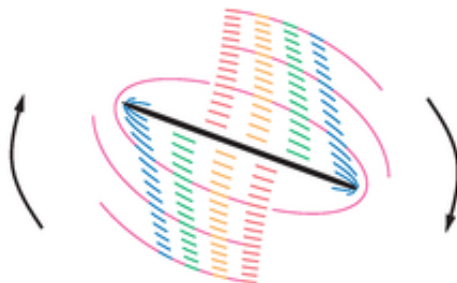


Sursa: <http://www.av8n.com/how/htm/airfoils.html>

Despre vârtejul din jurul aripii

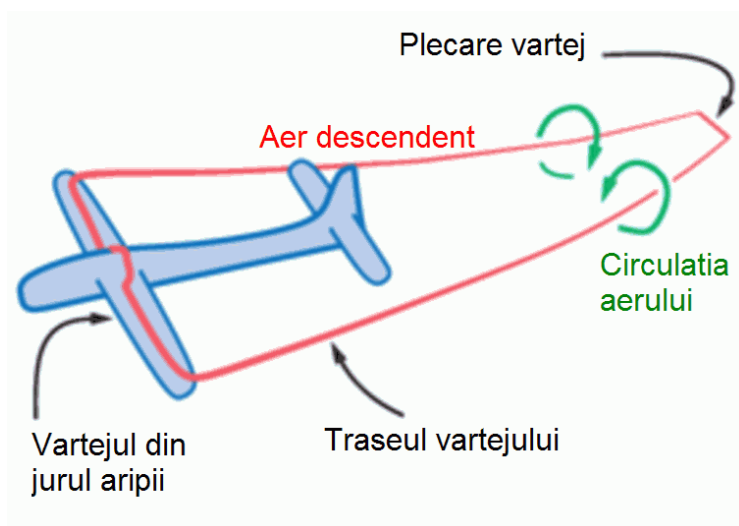
Mișcarea aerului în jurul aripii se modelează ca suprapunerea a două mișcări, una de translație (viteza de deplasare a aerului) și

una circulară, un vârtej, un vortex în jurul aripiei (vezi figura) dependent de *unghiul de atac*, unghiul dintre suprafața aripiei și orizontală.



Formarea unui vârtej (vortex)

Sursa: <http://www.av8n.com/how/htm/airfoils.html>



Circulația unui vârtej (vortex) în jurul unui avion

Sursa: <http://www.av8n.com/how/htm/airfoils.html>

Explicație folosind schimbarea direcției aerului.

Aerul ce trece pe lângă aripă este deflectat (dirijat) în jos de forma pe care o are aripa. Ca efect al schimbării de direcție de curgere a aerului este o schimbare de direcție de deplasare a aripii. Conform legii a treia a lui Newton, legea acțiunii și reacțiunii, dacă aripa acționează cu o forță îndreptată în jos asupra aerului, atunci aerul acționează cu o forță egală și de sens contrar, îndreptată în sus, asupra aripii:

$$F = dp/dt = v \, dm/dt = v \cdot \text{const.} \cdot \rho v S = \text{const.} \cdot S \rho v^2$$

deoarece debitul volumic $Q = dV/dt = Sv$:

$$dm/dt = \rho dV/dt = \rho d(S \cdot h)/dt \approx \text{const.} \cdot S \rho v$$

Pentru o deducere mai riguroasă vezi:

www.onemetre.net/design/downwash/Momentum/Momentum.htm

Cantitatea de aer care-și modifică direcția este uriașă, fiindcă este afectat aerul pe o distanță verticală egală cu anvergura (lungimea) aripilor (vezi figurile alăturate unde se observă și vârtejurile).





Procesul care produce sustentarea este unul singur.

Fiecare explicație pusă în evidență mai sus s-a concentrat doar pe un singur aspect al procesului care produce forța de sustentare. Aripa produce o circulație, un vârtej, proporțional cu unghiul de atac și cu viteza aerului. Această circulație ne spune că aerul de deasupra aripii se mișcă mai repede decât cel de dedesubt. Acest fenomen produce o presiune joasă deasupra aripii, conform cu principiul lui Bernoulli. Această presiune joasă trage în sus aripa și împinge în jos aerul în acord cu legea a 3-a a lui Newton, legea acțiunii și reacțiunii.

Fenomenul sustentăției este descris riguros de *teorema lui Kutta și Jukovski* (*Kutta-Zhukovsky theorem*):

$$F_{\text{ridicare}} = \text{viteza aer} \times \text{circulație} \times \text{densitate aer} \times \text{anvergură} \quad (9)$$

unde "circulația" este proporțională cu produsul dintre viteza aerului și coeficientul de sustentare (proporțional cu unghiul de atac).

Un cilindru rotitor generează portanță

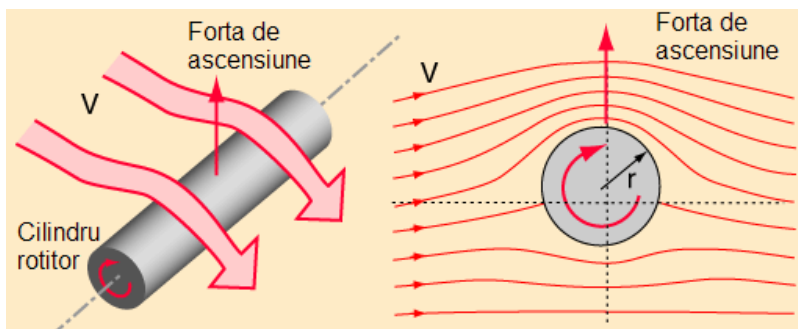
Un cilindru orizontal care se rotește generează o forță verticală de susținere. Acest fapt a fost explicat de doi teoreticieni în aerodinamică, Martin Wilhelm Kutta (1902) din Germania și Nikolay Yegorovich Zhukovsky (1906) din Rusia prin ceea ce acum se numește *teorema Kutta și Jukovski (Kutta-Zhukovsky theorem)*. Formula forței de ascensiune (portanță) este:

forța portantă pe unitatea de lungime = $\rho G v$

unde " ρ " e densitatea aerului, " v " viteza de curgere a aerului și " G " este "tăria vârtejului" (vortex strength) dată de relația:

$$G = 2\pi\omega r^2$$

unde ω este viteza unghiulară de rotație a cilindrului și " r " raza cilindrului.

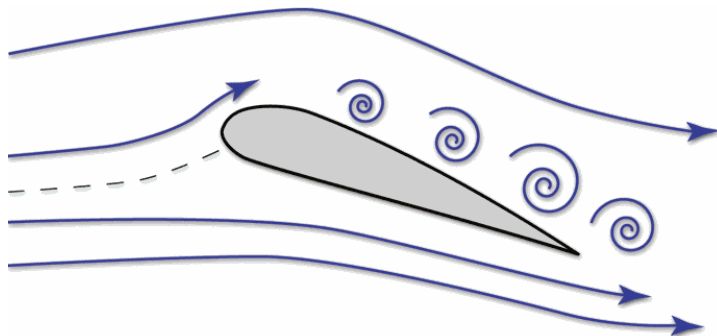


Forța de ascensiune generată de cilidrul rotitor.

<http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/fluids/kutta.html>

Mărirea coeficientului de sustentăție

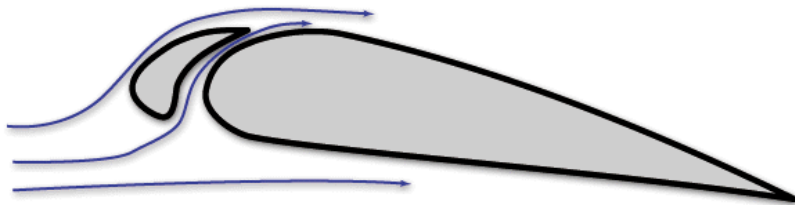
O forță de sustentăție mai mare a aripiei se obține cu *flaps-uri* în coada aripiei sau/și cu prize de aer (*slats-uri*) la bordul de atac al aripiei.



Pierderea de portanță a aripiei la unghiuri mari de atac ($>15^\circ$) se datorează desprinderii de suprafața superioară a aripiei a stratului de aer limită și formării de vârtejuri.

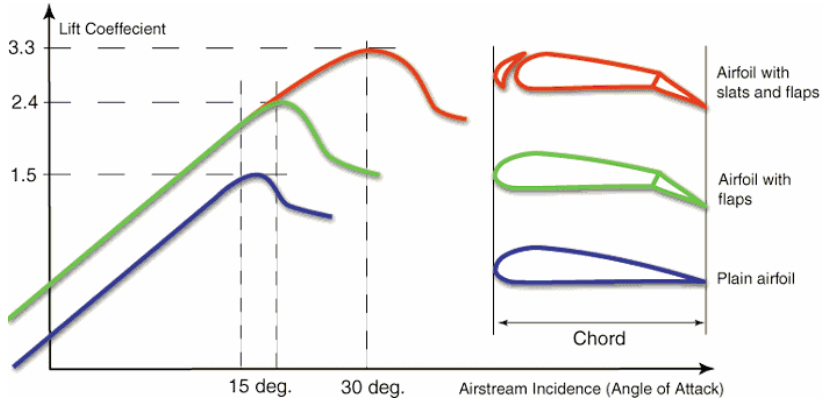
sursa: <http://www.zenithair.com/stolch801/design/design.html>

Această problemă se poate rezolva prin intermediul prizelor de aer (*slats-uri*) la bordul de atac al aripiei, adică permițând unei părți din aerul aflat lângă și sub bordul de atac al aripiei să ajungă în partea superioară a profilului de aripă, ajutând în felul acesta ca fluxul de aer de pe suprafața superioară a aripiei să rămână "lipit" de profil și să nu formeze vârtejuri.



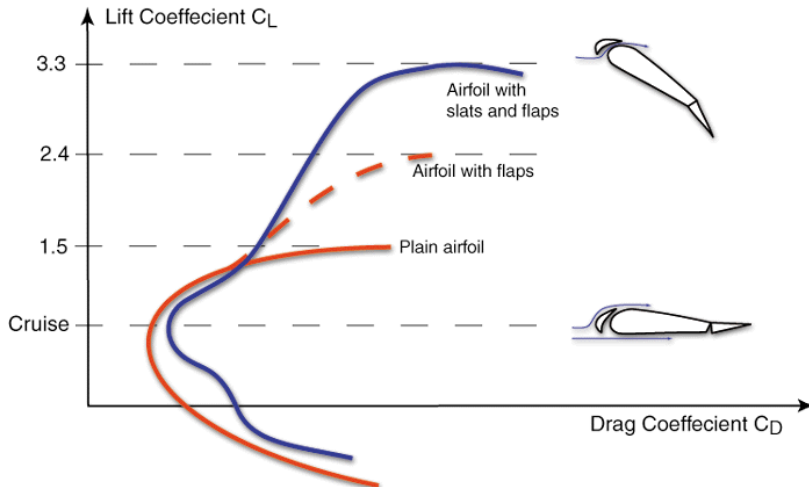
Priza de aer (*slats*) la bordul de atac al aripiei.

Creșterea coeficientului de sustentație este impresionantă ca și cea a unghiului maxim de atac care de la 15° ajunge la 30° . În așa condiții decolarea avionului este mult mai ușoară, unghiul de atac mare dă o portanță mare la viteze de deplasare mici și drept consecință avionul poate decola de pe piste scurte.



Coeficientul de sustentație în funcție de unghiul de atac și influența prizei de aer (*slats*) și a *flaps*-urilor.

Sursa: <http://www.zenithair.com/stolch801/design/design.html>



Priza de aer (*slats*) la bordul de atac al aripii îmbunătățește portanța aripii la unghiuri mari de atac.

Un avion ultra-uşor (352 kg) Zenith STOL CH 750 cu astfel de aripi cu portanță mare (9 m anvergură) duce o sarcina utilă de 247 kg cu viteza de 170 km/h (105 mph) folosind un motor cu puterea de 105 CP, având nevoie de circa 30 m pentru decolare sau aterizare. Puterea motorului și sarcina utilă sunt foarte aproape de cele ale unui automobil obișnuit!



Un avion ultra-uşor Zenith STOL CH 750
sursa: <http://www.zenithair.com/stolch750/>



Probabil așa ți-ai putea rezolva problema deplasării prin oraș fără să te afecteze blocajele de circulație! Poți face asta cu un avion ultra-uşor, max. 204 kg cu pilotul, cu anvergura de 11m, cu 2 motoare de 9,5 CP ce-ți permit să te deplasezi cu viteza de croazieră de 72 km/h. Inițial acest avion canadian, Lazair, avea motoare de 5.5 CP (100 cm³) folosite la fierăstraiele mecanice ("drujbe").

sursa: https://en.wikipedia.org/wiki/Ultralight_Lazair

CĂLDURA ȘI TEMPERATURA

Senzorii de temperatură sunt peste tot de la termostatul de pe perete și termometrul medical al familiei la senzorii liniilor de producție sau cei de pe navele spațiale. Pentru satisfacerea multiplelor aplicații, industria senzorilor a dezvoltat tehnici de sesizare diverse.

Temperatura este o măsură a stării termodinamice a sistemului (obiectului studiat) și descrie macroscopic cantitatea de energie cinetică microscopică medie din material:

$$m \cdot \langle v^2 \rangle / 2 = (3/2) \cdot k_B \cdot T \quad (1)$$

unde: m – masa unei molecule;
 $\langle v^2 \rangle$ – viteza pătratică medie a unei molecule;
 k_B – constanta Boltzmann ($1,38 \cdot 10^{-23}$ J/K);
 T – temperatura în grade Kelvin, K ($=273+t$ °C).

Dacă două corpuri au aceeași temperatură, sunt în echilibru termodinamic unul față de celălalt. Punându-le în contact nu va exista schimb de căldură între ele. Este așa numitul *principiu zero al termodinamicii*.

Temperatura nu e o măsură a cantității de energie a sistemului. Materiale diferite cu masa unitară (1 kg) cedează sau primesc cantități diferite de energie pentru a-și modifica temperatura cu o valoare dată. Temperaturile identice a două corpuri implică doar că nu se va transfera căldură între ele, indiferent de energia termică stocată în fiecare corp. Cantitatea de căldură

(energia termică) necesară schimbării cu un grad a temperaturii unui kilogram de material dat reprezintă **căldura specifică** "c" a materialului:

$$c = Q/(m \cdot \Delta t) \quad [c]_{SI} = J/(kg \cdot \text{grad}) \quad (2)$$

unde: Q – căldura primită sau cedată de corp în Joule-i "J";
m – masa corpului în kilograme "kg";
 Δt – variația temperaturii în grade Celsius (Kelvin).

Relația este foarte utilă pentru calcularea căldurii schimbate de un corp când știm variația temperaturii din măsurători și căldura specifică din tabele (măsurători făcute de alții), constituind baza "**Calorimetriei**":

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta t = m \cdot c \cdot (t_{\text{final}} - t_{\text{inițial}}) \quad (3)$$

Schimb de căldură poate exista și fără modificarea temperaturii ca în cazul vaporilor de apă ce condensează sau a apei ce fierbe (tranziții de fază de ordinul întâi). Această căldură raportată la masa unitate se numește **căldură latentă** de **vaporizare/condensare** sau **topire/solidificare**:

$$\lambda = Q/m \quad [\lambda]_{SI} = J/kg \quad (4)$$

Problemă.

- a) În cât timp se încălzește o cană cu apă ($V=200$ ml) de la 20°C la 100°C cu un încălzitor electric cu puterea $P=200$ W?
- b) În cât timp se evaporă complet apa care fierbe sub acțiunea încălzitorului electric? Știm: $\rho_{\text{apa}}=1000$ kg/m³, $c_{\text{apa}}= 4180$ J/(kg·grad), $\lambda_{\text{apa-abur}}= 2260$ kJ/kg.

a) $Q = m \cdot c \cdot \Delta t = \rho V c \cdot \Delta t = 66,88$ kJ

$$P=Q/t \Rightarrow t=Q/P = 334,4 \text{ s } [5,57 \text{ min}]$$

b) $Q' = m \lambda = 452$ kJ $\Rightarrow t'=Q'/P = 2260$ s [~ 38 min]

Standardul actual pentru măsurarea temperaturii este ITS-90, Scala Internațională de Temperatură din 1990 (International Temperature Scale), bazat pe punctele de tranziție de fază ale unor substanțe pure, cu gradul Kelvin definit ca $1/273,16$ din temperatura absolută a punctului triplu al apei. Alte puncte fixe principale ce definesc de această scală sunt date în tabel.

Puncte fixe principale de temperatură

Temperatura K	Temperatura °C	Substanța	Tranziția de Stare
13.8033	-259.3467	Hidrogen	Punct triplu
83.8058	-189.3442	Argon	Punct triplu
243.3156	-38.8344	Mercur	Punct de topire
273.1616	0.0100	Apa	Punct triplu
429.7485	156.5985	Indiu	Punct de topire
692.6770	419.5270	Zinc	Punct de topire
1234.9300	961.7800	Argint	Punct de topire

Puncte fixe secundare de temperatură

Temperatura K	Temperatura °C	Substanța	Tranziția de stare
250,25	-22,90	CCl_4	Topire
273,15	0,00	Gheață	Topire
305,53	32,38	Na_2SO_4	Tranziție
505,00	231,85	Staniu	Topire
594,05	320,90	Cadmiu	Topire
600,55	327,40	Plumb	Topire
903,90	630,74	Stibiu	Topire
1073,55	800,40	NaCl	Topire

Definirea scalei de temperatură pe baza punctelor triple sau a celor de topire/solidificare este făcută din cauză că ele pot fi reproduse cu un grad înalt de precizie și repetabilitate. Între punctele de referință măsurarea temperaturii se face interpolând între aceste puncte de calibrare.

Măsurarea mecanică a temperaturii

Termometrul cu lichid

Modificarea temperaturii produce dilatarea (sau contractarea) materialului. Pe acest fenomen se bazează multe termometre. Tipic este **termometrul cu lichid** unde un volum "V" de lichid închis în *bulbul* termometrului se dilată și volumul suplimentar urcă într-un tub subțire *capilar*. Înălțimea la care urcă va fi:

$$h = t \cdot 4 \cdot V_0 \cdot (a_{\text{lichid}} - a_{\text{sticla}}) / (\pi \cdot d^2) \quad (5)$$

rezultând din egalarea volumului suplimentar de lichid ΔV care iese din bulb și ocupă un volum cilindric în capilar:

$$\Delta V = V_0 [1 + (a_{\text{lichid}} - a_{\text{sticla}}) \cdot t] - V_0 = h \cdot \pi \cdot d^2 / 4 \quad (6)$$

unde: V_0 – este volumul bulbului (și de lichid din bulb) la $t=0$
 a_{lichid} – coeficientul de dilatare volumică al lichidului
 a_{sticla} – coeficientul de dilatare volumică al sticlei
 d – diametrul tubului capilar
 t – temperatura în grade Celsius.

Lichidele cele mai folosite sunt mercurul și alcoolul (colorat prin dizolvarea unui colorant pentru a fi mai ușor vizibil în tubul capilar).



Termometrul cu bimetal

Dilatarea termică este utilă în **termometrele cu bimetal**.

Termobimetalele se realizează din lamele subțiri din metale sau aliaje cu coeficienți de dilatare termică liniară diferiți, sudate pe întreaga lor lungime prin laminare la cald. Sub acțiunea căldurii apar deformații de la *materialul activ* (A) cu coeficient de dilatare termică mare, spre *materialul inert* (I) sau pasiv cu coeficient de dilatare mic. Dacă la temperatura de 0°C lamela bimetalică este dreaptă, reprezentată cu linie roșie, la creșterea temperaturii cu $\Delta t^\circ\text{C}$, prin alungirea termică diferită a celor două materiale, lamela se va curba aproximativ ca un arc de cerc cu raza "R" care închide unghiul la centru " $\Delta\varphi = 2 \cdot u$ " (reprezentată cu linie neagră). Exprimând alungirile termice al celor două lamele cu condiția aderenței lor pe întreaga lungime de contact, rezultă:

$$\begin{aligned} L_1 &= \Delta\varphi \cdot R_1 = L \cdot (1 + \alpha_I \cdot \Delta t) \quad \text{și} \\ L_2 &= \Delta\varphi \cdot (R_1 + g) = L \cdot (1 + \alpha_A \cdot \Delta t) \\ \Rightarrow \quad \Delta\varphi \cdot g &= L \cdot (\alpha_A - \alpha_I) \cdot \Delta t \end{aligned} \quad (7)$$

unde: α_A, α_I - coeficienții de dilatare liniară ai lamelor;
 g - grosimea totală a celor două lamele;
 L - lungimea lamelei în stare nedeformată.

Aproximând curbarea lamelei cu o rotire a ei de unghi $u = \Delta\varphi/2$, obținem deplasarea " $f = NP$ " a capătului liber al lamelei:

$$f = L \cdot \Delta\varphi/2 = L^2 \cdot (\alpha_A - \alpha_I) \cdot \Delta t / (2 \cdot g) \quad (8)$$

Un calcul mai exact oferă rezultatul:

$$\Delta\varphi = (3/2) \cdot (\alpha_A - \alpha_I) \cdot L \cdot \Delta t / g \quad (9)$$

iar din:

$$1/R = \Delta\varphi / L \quad (10)$$

cu ajutorul integralei lui Mohr, se poate obține **săgeata termică** – deplasarea capătului mobil al lamelei – caracteristica statică a traductorului:

$$f = 3 \cdot L^2 \cdot (\alpha_A - \alpha_I) \cdot \Delta t / (4 \cdot g) = S \cdot \Delta t \quad (11)$$

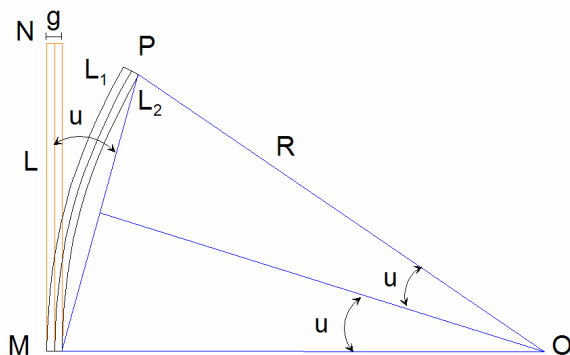


Figura 1. Deformarea bimetalului sub acțiunea căldurii

Sensibilitatea traductorului "S" este cu atât mai mare cu cât diferența între coeficienții de dilatare termică și lungimea lamelei sunt mai mari și grosimea lamelei mai mică:

$$S = 3 \cdot L^2 \cdot (\alpha_A - \alpha_I) / (4 \cdot g) \quad (12)$$

Din condiții de rezistență a materialelor rezultă un maxim al sensibilității dacă:

$$g_A / g_I = (E_I / E_A)^{1/2} \quad (13)$$

"E" fiind modulul de elasticitate (Young) al fiecărui material.

Termometrul cu gaz la volum constant

Termometrul cu gaz la volum constant funcționează pe baza ecuației termice a gazelor:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \quad (14)$$

unde: p – presiunea gazului;
V – volumul gazului;

n —numărul de kilomoli de gaz;

R —constanta universală a gazelor ($8310 \text{ J}/(\text{K} \cdot \text{kmol})$)

T —temperatura în grade Kelvin, $K (=273+t \text{ } ^\circ\text{C})$.

Ecuația (14) arată că se poate măsura temperatura din dilatarea unui gaz la presiune constantă. În practică este mai avantajos să menținem volumul de gaz constant și să măsurăm presiunea pentru a determina temperatura. Avantajele acestui tip de termometru sunt deosebita liniaritate și repetabilitatea.

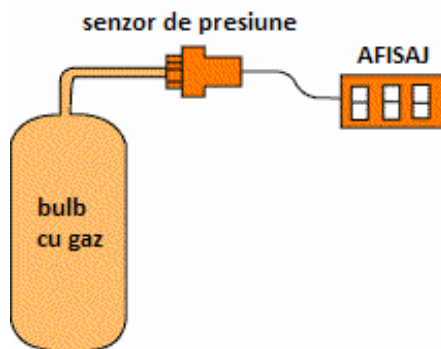


Figura 2. În termometrul cu gaz la volum constant, temperatura este măsurată de presiunea generată de un volum fix de gaz.

Măsurarea electrică a temperaturii

Termocuplul

Într-un fir metalic ale cărui capete se află la temperaturi diferite $T_1 > T_2$ apare o diferență de potențial electric U_{12} cauzată de faptul că electronii de conducție din capătul cu temperatură mai mare au o energie cinetică mai mare și vor difuza către capătul mai rece. În acest fel capătul cald se va încărca pozitiv iar capătul rece al firului se va încărca negativ. Acest fenomen a fost pus în evidență de Seebeck în anul 1821 și poartă numele de *efect Seebeck*. De remarcat că dacă purtătorii mobili de

sarcină sunt golurile, sarcini pozitive, atunci capătul cald se încarcă negativ iar cel rece pozitiv. Din această cauză efectul termoelectric sau efectul Seebeck e folosit pentru determinarea tipului de purtători de sarcină liberi dintr-un semiconductor.

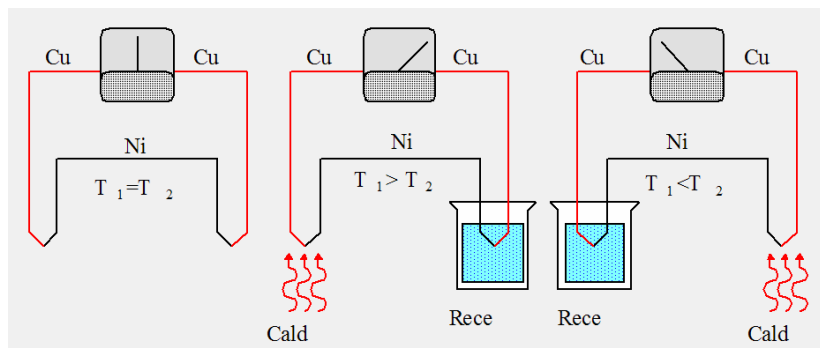


Figura 3. Generarea unei tensiuni termoelectrice prin aplicarea unei diferențe de temperatură unui dispozitiv format din 2 metale diferite.

Efectul Seebeck are trei cauze care se reflectă în coeficientul Seebeck :

$$S = S_v + S_c + S_f \quad (15)$$

S_v -componenta volumică a coeficientului Seebeck, datorată difuziei preponderente a purtătorilor mobili de sarcină electrică de la extremitatea caldă spre cea rece;

S_c -componenta de contact a coeficientului Seebeck, datorată variației potențialului de contact cu temperatura, legat de dependența de temperatură a potențialului chimic, nivelul Fermi F (importantă doar la semiconductori);

S_f -componenta fononică a coeficientului Seebeck, datorată antrenării electronilor de conducție de către fononii (vibrațiile rețelei cristaline) care se deplasează de la extremitatea caldă spre cea rece (importantă doar la temperaturi joase, criogenice).

Tensiunea termoelectromotoare (t.t.e.m.) U_{12} este direct proporțională cu diferența de temperatură dintre capetele firului:

$$U_{12} = V_1 - V_2 = S \cdot (T_1 - T_2) \quad (16)$$

unde S este coeficientul Seebeck, o proprietate a materialului din care este făcut firul. În cazul concret în care firul este din cupru și plecăm din 1 și 2 tot cu fire din cupru către un instrument de măsură sensibil, vom constata că tensiunea indicată va fi zero. Cauza este aceea că din tensiunea inițială U_{12} se scade tensiunea termoelectrică a firelor de legătură, în cazul de față identică cu tensiunea inițială. E ca și cum am lega două baterii identice cu bornele "+" împreună și bornele "-" împreună, oriunde întrerupem circuitul și măsurăm tensiunea, aceasta va fi zero. Situația se schimbă dacă între punctele 1 și 2 avem un fir de nichel, iar de la punctele 1 și 2 plecăm către instrumentul de măsură cu un fir din cupru, atunci voltmetrul va indica o diferență de potențial. În acest caz fiind vorba de metale diferite, cu coeficienți Seebeck diferiți, diferența de potențial măsurată va fi:

$$\begin{aligned} U &= U_{12}(\text{Ni}) - U_{12}(\text{Cu}) = S_{\text{Ni}} \cdot (T_1 - T_2) - S_{\text{Cu}} \cdot (T_1 - T_2) = \\ &= (S_{\text{Ni}} - S_{\text{Cu}}) \cdot (T_1 - T_2) \end{aligned} \quad (17)$$

Uzual în tabele se dau coeficienții Seebeck relativi, măsurări pentru materialul respectiv față de un material de referință (de cele mai multe ori platina). Alăturat este tabelul cu valoarea tensiunii termoelectromotoare (t.t.e.m.) U , în milivolți, pentru diverse materiale față de platină (Pt) atunci când o joncțiune este menținută la 0°C și cealaltă la 100°C .

Metal	Ag	Bi	Cu	Co	Fe	Ge	Mo	Ni	Pb	Sb	Si
$U(\text{mV})$	0,74	-7,34	0,76	-1,33	1,98	33,9	1,45	-1,48	0,44	4,89	-41,5

Tensiunile termoelectrice (mV) generate de termocuplurile industriale uzuale

Temperatura (°C)	Tip N +Nicrosil – Nisil	Tip T +Cu –Constantan	Tip J +Fe –Constantan	Tip E +Cromel –Constantan	Tip K +Cromel –Alumel	Tip S +PtRh –Pt
–200		–5,7	–8,15	–8,824	–5,89	
–100		–3,4	–4,60	–5,237	–3,55	
0	0	0	0	0	0	0
100	2,774	4,25	5,37	6,317	4,10	0,64
200	5,912	9,20	10,95	13,419	8,13	1,44
300	9,340	14,89	16,55	21,033	12,21	2,32
400	12,972	20,99	22,15	28,943	16,40	3,26
500	16,744	27,40	27,84	36,999	20,65	4,22
600	20,609	34,30	33,66	45,085	24,91	5,23
700	24,526		39,79	53,11	29,15	6,27
800	28,456		46,23	61,022	33,32	7,34
900	32,370		53,15	68,783	37,37	8,45
1000	36,248				41,32	9,60
1100	40,076				45,16	10,77
1200	43,836				48,85	11,97
1300	47,502					13,17
1400						14,38
1500						15,58
1600						16,76

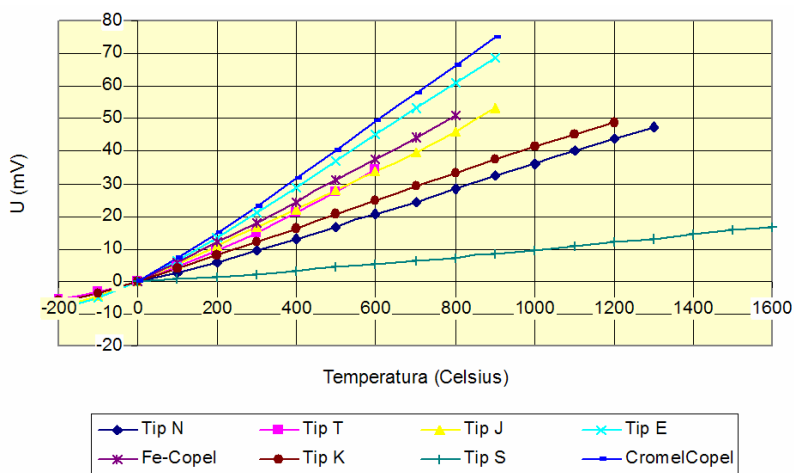


Figura 4. Graficul tensiunilor termoelectrice în funcție de temperatură pentru termocuplurile uzuale.

Materialele care puse împreună au efect Seebeck măsurabil formează un **termocuplu**. Coeficientul Seebeck al unui material nu rămâne constant în funcție de temperatură. Două materiale pot fi folosite împreună într-un termocuplu industrial doar dacă coeficientul Seebeck al cuplului este relativ constant pe domeniul de temperaturi în care se lucrează.

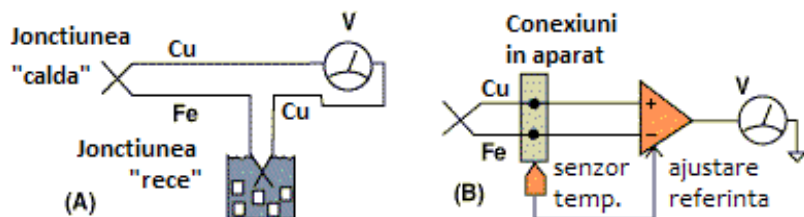


Figura 5. Un termocuplu are întotdeauna două joncțiuni, una de măsură (caldă) alta de referință (rece). Într-un montaj clasic (A) joncțiunea de referință a termocuplului e menținută la temperatură constantă în apă cu gheață (0°C). În sistemele moderne de măsurare a temperaturii (B) se folosește un senzor de temperatură suplimentar care compensează efectul joncțiunii reci aflată la temperatura mediului ambiant (variabilă).

Avantajele termocuplelor sunt prețul mic (o pereche de fire de $1\text{m} < 1\$$), precizia bună a măsurătorilor și domeniul de lucru larg ($< 0^{\circ}\text{C}$ la $> 1000^{\circ}\text{C}$).

Principalul dezavantaj al termocuplelor este tensiunea mică produsă (circa $50\ \mu\text{V}/^{\circ}\text{C}$ la termocuplul Fe/constantan tip J). Problema acestei tensiuni nu este neapărat mărimea ei ci faptul că este comparabilă cu tensiunile termoelectrice generate pe joncțiunile parazite formate la conexiunile între fire către instrumentul de măsură.

Termorezistența din platină

Deplasarea electronilor de conducție în metal este îngreunată de vibrațiile atomilor rețelei cristaline. Amplitudinea acestor vibrații crește cu creșterea temperaturii. Astfel apare dependența de temperatură a rezistivității electrice a metalelor fiindcă amplitudinea vibrațiilor rețelei cristaline este dependentă de temperatură.

Cunoscând dependența de temperatură a rezistivității electrice a metalului, putem construi un senzor de temperatură bazat pe acest fenomen. Platina este cel mai utilizat metal pentru construirea *termorezistențelor* (RTD, **R**esistance **T**emperature **D**etector) fiindcă se prelucrează relativ ușor și este stabilă din punct de vedere chimic și fizic pe o gamă largă de temperaturi în diverse medii.

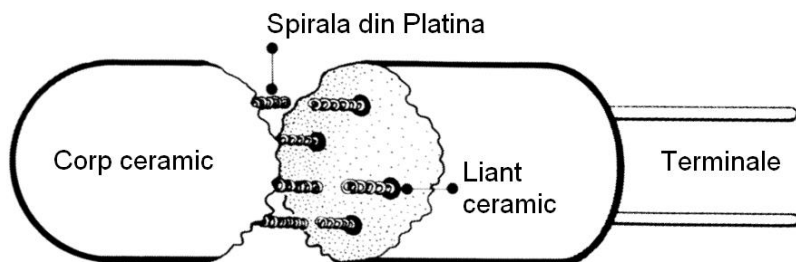


Figura 6. Construcția unei termorezistențe din platină

Pentru comportarea rezistenței electrice a platinei în funcție de temperatură avem ecuația empirică Callendar-Van Dusen :

$$R/R_0 = 1 + \alpha \cdot [t - \delta \cdot (t/100 - 1) \cdot (t/100) - \beta \cdot (t/100 - 1) \cdot (t/100)^3] \quad (18)$$

- R = rezistența electrică la temperatura "t" ;
- R_0 = rezistența electrică la 0°C;

- $\beta=0$ pentru $t \geq 0^\circ\text{C}$, $\neq 0$ la $t < 0$;
- " α " panta medie a curbei rezistență/temperatură în intervalul $0-100^\circ\text{C}$, fiind un indicator bun al purității platinei și al stării de tratament termic (recoacere, annealing); $\alpha = (R_{100} - R_0)/(100 \cdot R_0)$
- " δ " depărtarea de la liniaritate a curbei rezistență/temperatură în intervalul $0-100^\circ\text{C}$, depinzând de dilatarea termică a materialului și de densitatea de stări electronice lângă nivelul Fermi.

Termorezistențele sunt făcute din platină cu puritate conform standardelor IEC/DIN, în care platina este ușor impurificată cu un metal din grupa platinei, sau din platină cu puritate de referință 99,99%. La 0°C ambele termorezistențe au $100 \, \Omega$, dar la 100°C platina de puritate IEC/DIN va arăta $138,5 \, \Omega$, iar cea cu puritate de referință $139,26 \, \Omega$.

- Platina cu puritate IEC/DIN are $\alpha = 3,850 \cdot 10^{-3} \, \Omega/\Omega/^\circ\text{C}$
- Platina cu puritate de referință are $\alpha = 3,926 \cdot 10^{-3} \, \Omega/\Omega/^\circ\text{C}$

Ecuția Callendar-Van Dusen poate fi aproximată cu relația mai simplă :

$$R = R_0 (1 + At + Bt^2) \quad t \geq 0^\circ\text{C} \quad (19)$$

$$R = R_0 [1 + At + Bt^2 + C(t - 100^\circ\text{C})t^3] \quad t < 0^\circ\text{C} \quad (20)$$

unde:

$$A = \alpha \cdot (1 + \delta/100) \, ^\circ\text{C}^{-1}, \quad B = -\alpha \cdot \delta \cdot 10^{-4} \, ^\circ\text{C}^{-2}. \quad (21)$$

Pentru interșanjabilitatea termorezistențelor de platină (să poți înlocui termorezistența fără a recalibra sistemul de măsură) standardul internațional IEC 751, echivalent ITS 90, stabilește pentru coeficienții din relația rezistență/temperatură valorile următoare:

$$\begin{aligned} A &= 3,90833 \cdot 10^{-3} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}; \\ B &= -5,7753 \cdot 10^{-7} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-2}; \\ C &= -4,1833 \cdot 10^{-12} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-4}. \end{aligned} \quad (22)$$

Calități metrologice ale termorezistențelor din Pt

Precizia. Standardul IEC 751 stabilește două clase de precizie pentru toleranțele admise la citirea temperaturii cu ajutorul termorezistențelor de platină:

- clasa A $\Delta t = \pm (0,15 + 0,002 \cdot |t|) [^{\circ}\text{C}]$,
între -200 și $+650$ $^{\circ}\text{C}$
în conexiune cu 3 sau 4 terminale,
- clasa B $\Delta t = \pm (0,30 + 0,005 \cdot |t|) [^{\circ}\text{C}]$,
între -200 și $+850$ $^{\circ}\text{C}$

Stabilitatea este capacitatea senzorului de-a menține aceeași valoare la ieșire atunci când condițiile de intrare se mențin constante (în timp). Tensiunile mecanice datorate coeficienților de dilatare diferiți ale platinei și materialelor suport sau modificările chimice ale firului de platină datorate atmosferei în care lucrează termorezistența pot genera alterarea răspunsului. La termorezistențele din platină avem un drift de $0,05$ $^{\circ}\text{C}/\text{an}$.

Repetabilitatea - proprietatea senzorului de-a indica aceleași valori pentru aceleași condiții de intrare aplicate în mod repetat.

Moduri de măsurare a temperaturii

Sesizarea temperaturii se poate face:

- prin contact cu obiectul
- fără contact cu obiectul.

Sesizarea prin contact a temperaturii se face cu:

- Termometre mecanice
- Termocuplul
- Termorezistența (RTD)
- Termistorul
- Dispozitive semiconductoare

Sesizarea fără contact a temperaturii se face prin măsurarea energiei undelor electromagnetice emise de corpurile solide sau lichide, de obicei radiația infraroșie (IR).

Avantajele Termocuplelor – Lucrează la temperaturi mari
 – Robuste
 – Pot să răspundă repede

Avantajele RTD – Domeniu larg de temperaturi
 – Repetabilitate și stabilitate
 – Liniaritate
 – Costuri mici de interconectare

Avantajele Termistoarelor – Preț mic
 – Rezistență electrică mare
 – Dimensiuni mici
 – Semnal mare
 – Sensibilitate mare

Avantajele IR – Interacțiune minimă cu mediul
 – Măsoară temperatura obiectelor în mișcare
 – Nu contaminează obiectul măsurat
 – Poate fi izolat de mediile periculoase

Selecția senzorului de temperatură răspunzând acestor întrebări:

- Aplicația necesită sesizarea temperaturii cu sau fără contact?
- Ce precizie se pretinde pentru citirea temperaturii?
- Pe ce domeniu de temperatură se măsoară?
- Care-i temperatura maximă suportată de senzor?

- Cât de rapid trebuie să răspundă senzorul?
- Ce timp de viață trebuie să aibe senzorul?
- Ce condiționări legate de mediu există?
- Senzorul necesită dispozitive de protecție mecanică?
- Care-i bugetul alocat problemei?

Etalonați termometrul folosind punctele fixe principale și/sau punctele fixe secundare (vezi tabelele de la început).

Sisteme de încălzire cu acumulare de căldură

Sistemele de încălzire cu acumulare de căldură (sobe) acumulează căldura prin încălzirea cărămizilor din corpul sobei. Știind densitatea cărămizilor $d = 1900 \text{ kg/m}^3$ și căldura lor specifică $c = 0,88 \text{ kJ/(kg} \cdot \text{grd)}$ putem calcula capacitatea calorică volumică (cantitatea de căldură necesară încălzirii cu un grad a unui metru cub din acel material):

$$Q_v = d \cdot c = 1,64 \text{ MJ/(m}^3 \cdot \text{grd)}$$

Apa ca mediu de acumulare ($d = 1000 \text{ kg/m}^3$, $c = 4,185 \text{ kJ/(kg} \cdot \text{grd)}$) are de 2,55 ori mai mare capacitatea calorică volumică decât cărămida:

$$Q_v = d \cdot c = 4,185 \text{ MJ/(m}^3 \cdot \text{grd)}$$

O sobă tipică ($\ell = L = 0,5 \text{ m}$ și $H = 2 \text{ m}$) cu volumul:

$$V = \ell \times L \times H = 0,5 \text{ m}^3$$

și masa $m = d \cdot V = 950 \text{ kg}$, încălzită de la 20°C la 90°C acumulează energia:

$$Q = V \cdot Q_v \cdot \Delta t = 57,4 \text{ MJ} (\Delta t = 90 - 20 = 70^\circ\text{C})$$

O sobă cu apă cu volumul jumătate ($\ell = L = 0,5 \text{ m}$ și $H = 1 \text{ m}$) are masa 250 kg și va acumula cu 27% mai multă căldură: $Q = V \cdot Q_v \cdot \Delta t = 0,25 \cdot 4,185 \cdot 70 = 73,2 \text{ MJ}$.

Sistemele avansate de acumulare a căldurii (Z.Ardeleanu, Gh. Folescu - Captatoare solare - Ed.Șt. Enc. 1980 p. 71) folosesc săruri hidratate care au capacități calorice volumice similare cu apa și mai pot acumula căldură pe seama căldurii latente de dizolvare.

Exemple numerice

1. Sarea Glauber (sulfat de sodiu, $\text{Na}_2\text{SO}_4 \cdot 10\text{H}_2\text{O}$) se dizolvă endoterm până la $32,4^\circ\text{C}$. Are căldura latentă de dizolvare $L=241,9\text{kJ/kg}$ și densitatea 1553kg/m^3 . Căldura latentă volumică va fi:

$$Q_v = L \cdot d = 375,6 \text{ MJ/m}^3$$

aproape cât absoarbe 1 m^3 de apă pe un interval de temperatură $\Delta t = 89,7^\circ\text{C}$. Cu căldura specifică $C=2,93 \text{ kJ/(kg} \cdot \text{grd)}$ are capacitate termică de $4,55\text{MJ/(m}^3 \cdot \text{grd)}$.

2. Carbonatul de sodiu (soda de rufe, $\text{Na}_2\text{CO}_3 \cdot 10\text{H}_2\text{O}$) se dizolvă endoterm între $32,2 - 36,1^\circ\text{C}$, căldura latentă $L = 246,5 \text{ kJ/kg}$, și densitatea $d = 1441 \text{ kg/m}^3$ dau o căldură latentă volumică:

$$Q_v = L \cdot d = 355 \text{ MJ/m}^3.$$

3. O variantă interesantă este parafina ($d = 900 \text{ kg/m}^3$, $L = 151,3 \text{ kJ/kg}$) care are o capacitate calorică volumică:

$$Q_{v1} = d \cdot c = 2,61 \text{ MJ/(m}^3 \cdot \text{grd)}$$

și de la topire:

$$Q_{v2} = L \cdot d = 136 \text{ MJ/m}^3.$$

(A se cerceta săpunul, mai stabil chimic, ceara de albine, aliaje ușor fuzibile).

Scări termometrice și relațiile dintre ele

Temperatura este o mărime scalară ce caracterizează starea de încălzire a unui sistem fizico-chimic. Pentru determinarea valorilor temperaturii, se definesc mai multe **scări termometrice**, fiecareia dintre acestea corespunzându-i o anumită unitate de măsură a temperaturii, având denumirea generică de grad termometric.

Scara de temperatură: succesiune de valori într-un interval de temperatură după a cărei origine (punct zero) scările de temperatură se clasifică în scări convenționale și scări absolute.

Scara Celsius (scara centesimală): scara convențională de temperatură având la baza intervalul de temperatură dintre punctul de topire al gheții la presiune normală, căruia în mod convențional i s-a atribuit temperatura zero (originea scării) și punctul de fierbere al apei la presiunea normală, căruia convențional i s-a atribuit temperatura 100. În relațiile în care se utilizează scara Celsius, temperatura se notează " t ".

Grad Celsius ($^{\circ}\text{C}$): unitate de măsură pentru temperatură în scara Celsius, egală cu a 100-a parte din intervalul acestei scări. Are valoare egală cu a unității din S.I., este folosită în țara noastră.

Scara Reaumur - scară convențională de temperatură, având la bază intervalul de temperatură dintre punctul de topire al gheții și punctul de fierbere al apei, interval împărțit în 80 de părți. În relațiile în care se utilizează scara Reaumur, gradul de temperatură se notează cu $^{\circ}\text{R}$. $t = 100/80 \cdot ^{\circ}\text{R}$ ($1^{\circ}\text{C} = 0,8^{\circ}\text{R}$)

Grad Reaumur (°R): unitate de măsură pentru temperatură în scara Reaumur, egală cu a 80-a parte din intervalul acestei scări (0-100°C).

Scara Fahrenheit: scară convențională de temperatură, având la bază intervalul de temperatură dintre punctul de topire al gheții, căruia i s-a atribuit valoarea 32 și punctul de fierbere al apei, căruia i s-a atribuit valoarea 212, scara având deci o întindere de 212 părți, dintre care 180 de părți corespund intervalului de temperatură 0-100°C. În relațiile în care se utilizează scara Fahrenheit, temperatura se notează cu F. Scara Fahrenheit este folosită și astăzi în multe țări cu influență anglo-saxonă, mai ales în Statele Unite ale Americii.

Grad Fahrenheit (°F): unitate de măsură pentru temperatură, în scara Fahrenheit egală cu a 212-a parte din această scară, respectiv cu a 180-a parte din intervalul de temperatură care stă la baza acestei scări. Nu este folosită în țara noastră ($1^{\circ}\text{C}=1,8^{\circ}\text{F}$, $1,8=18/10=9/5$)

$$t (^{\circ}\text{C}) = 100 \cdot [t (^{\circ}\text{F}) - 32] / 180 = [t (^{\circ}\text{F}) - 32] / 1,8$$

$$t (^{\circ}\text{F}) = 32 + 180 \cdot t (^{\circ}\text{C}) / 100 = 32 + 1,8 \cdot t (^{\circ}\text{C})$$

Scara termodinamică: scară de temperatură la care intervalul de temperatură nu se mai stabilește prin proprietăți fizice de referință ale unui corp, ci prin schimburile de căldură.

Scara termodinamică absolută (scara Kelvin): scară de temperatură bazată pe principiul lui Carnot, al cărei punct zero (originea) este zero absolut (respectiv temperatura pentru care randamentul ciclului reversibil folosit ca mărime termometrică ar fi egal cu 1). În relațiile în care se utilizează scara Kelvin, temperatura se notează cu T .

$$t (^{\circ}\text{C}) = T (\text{K}) - 273,15.$$

Grad Kelvin (K): unitate de temperatură în scara termodinamică absolută. Este unitate fundamentală de temperatură în SI, Sistemul Internațional de unități de măsură. Când vorbim despre diferențe de temperatură un grad Kelvin = un grad Celsius, fiindcă la cele două scale diferă doar originea, zeroul scalei.

$$T \text{ (K)} = t \text{ (}^{\circ}\text{C)} + 273,15$$

Scara de temperatură Rankine: scară de temperatură asemănătoare scării termodinamice absolute bazată însă pe zero absolut al scării Fahrenheit, astfel că 0° Rankine = $-459,69^{\circ}\text{F}$. (Utilizată în țările anglo-saxone).

Scara internațională practică de temperatură: scară de temperatură sancționată de Convenția Generală de măsuri și greutăți din 1948 bazată pe șase puncte fixe de definiție (puncte principale) cărora li s-au atribuit valori considerate exacte la presiune normală și din o serie de puncte fixe secundare (vezi tabelele de la începutul capitolului) valorile fiind exprimate în grade Celsius. Legătura dintre orice temperatura și indicațiile termometrelor etalonate cu ajutorul punctelor fixe se realizează prin formule de interpolare. Această convenție a fost amendată în anul 1990 devenind Scala Internațională de Temperatură din 1990 (International Temperature Scale ITS-90).

Temperatura absolută (sau **termodinamică**), temperatura exprimată pe scara termometrică absolută în grade Kelvin.

Temperatura ambiantă, temperatura mediului din jurul unui corp.

Punctul critic (temperatura critică), temperatura maximă la care un gaz mai poate fi lichefiat prin comprimare.

Temperatura critică, temperatura-limită la care se produce (începe sau se termină) o schimbare de fază într-un material.

Temperatura de radiație, temperatura pe care trebuie s-o aibă un corp negru pentru a prezenta aceeași radiație cu un corp dat; este mai mică decât temperatura absolută a corpului fiindcă puterea de emisie a corpurilor este de obicei mai mică decât cea a corpului negru.

Temperatura normală, valoare a temperaturii stabilită în mod convențional: temperatura normală fizică este 0°C , iar temperatura normală tehnică este 20°C .

Temperatura de aprindere, temperatura minimă la care trebuie încălzit un amestec combustibil într-un motor pentru ca arderea, începută într-un anumit punct, să se poată extinde în toată masa de amestec. Ea depinde de felul combustibilului, de temperatura mediului înconjurător, de cantitatea de aer introdusă în motor etc. și este cuprinsă între 200 și 800°C .

Temperatura de ardere, temperatura pe care o au produsele unei arderi când dezvoltă căldură totală de ardere și care este mai înaltă decât temperatura de aprindere.

Fizicieni care au studiat în domeniul temperaturii:

- Andres **Celsius**, (1704 – 1744), astronom și fizician suedez, membru al Academiei de Științe din Stockholm, cunoscut pentru scara termometrică centezimală care îi poartă numele.
- William Thomson, lord **Kelvin** (1824 – 1907) fizician englez, membru al Societății Regale din Londra, are contribuții importante în domeniile termodinamicii și electromagnetismului. A dat una din formulările principiului al doilea al termodinamicii și a stabilit scara de temperatură care îi poartă numele. În 1852 a descoperit împreună cu J. P. Joule, efectul Joule – Thomson, care și-a

găsit aplicații în lichefierea gazelor. În 1856, a descoperit unul dintre efectele termoelectrice. A elaborat teoria circuitelor electrice rezonante și a participat la realizarea primului cablu telegrafic transatlantic.

- Gabriel Daniel **Fahrenheit**, (1686 – 1736), fizician german, a construit primul termometru cu mercur în 1714 – 1715 și scara termometrică care îi poartă numele. A pus în evidență fenomenul de subrăcire la apa (1721).
- William John Macquorn **Rankine**, (1820 – 1872), inginer și fizician scoțian, a fost profesor la Universitatea din Glasgow. Rankine este unul dintre fondatorii termodinamicii tehnice. În 1850, independent de Clausius, a elaborat, pe baza legilor termodinamicii, teoria generală a ciclurilor de funcționare a motarelor termice și a studiat ciclul teortic al instalației de forță cu abur, cunoscut sub denumirea de ciclu Rankine.
- René Antoine Ferchault **Réaumur**, (1683 – 1757), fizician și naturalist francez, a fost membru al Academiei de Științe din Paris. Este cunoscut mai ales pentru termometrul său cu alcool, care a dat numele unei scări termometrice mult utilizate până de curând. Ca naturalist, Réaumur a studiat nevertebratele, în special insectele.

CONDUȚIA CĂLDURII

Transferul de energie termică de la un corp la altul se face prin *conducție termică*, dacă cele două corpuri sunt în contact (ca atunci când pui mâna pe cana de cafea), prin *radiație termică*, când corpurile nu au contact direct (modul în care Soarele încălzește Pământul) sau prin *convecție*, prin mișcarea fluidului (gaz sau lichid) în jurul unui corp. Aici vom discuta despre transferul de energie termică prin conducție.

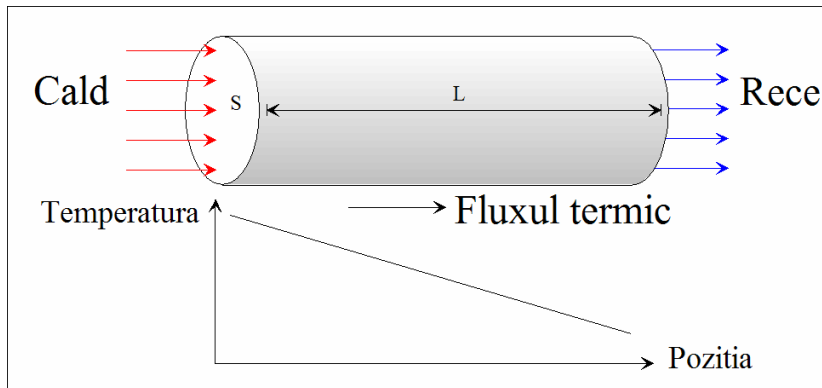


Figura 1. Propagarea căldurii într-un corp cu extremitățile aflate la temperaturi diferite.

Printr-o bară de lungime L și aria secțiunii transversale S , cu un capăt la temperatura mare T_1 și celălalt capăt la temperatura T_2 mică, va trece un *flux termic* (căldură transportată în unitatea de timp) P_T direct proporțional cu aria secțiunii barei S și diferența

de temperatură $\Delta T = T_1 - T_2$ dintre capetele barei și invers proporțional cu lungimea ei L :

$$P_T = \lambda \cdot S \cdot \Delta T / L \quad (1)$$

unde λ este o constantă de proporționalitate care depinde de materialul din care este executată bara, numită **conductivitate termică**. Unitățile de măsură sunt:

$$[P_T]_{SI} = [dQ/dt]_{SI} = J/s = W \quad [\lambda]_{SI} = W/(m \cdot ^\circ C)$$

unde gradele pot fi Celsius sau Kelvin (fiindcă este o diferență de temperatură).

O relație asemănătoare legii lui Ohm din electricitate se poate stabili pentru conducția căldurii:

$$R_T = \Delta T / P_T \quad (2)$$

unde: $R_T = L/(S \cdot \lambda)$ este **rezistența termică** $[R_T]_{SI} = ^\circ C/W$;
 ΔT - diferența de temperatură (de "potențial");
 P_T este curentul (fluxul) termic (curent "electric").

Exemple

1. Știind $\lambda = 0,8 \text{ W}/(m \cdot K)$, conductivitatea termică a cărămidilor unui zid cu înălțimea $H = 3m$, lungimea $\ell = 5m$ și grosimea $g = 0,4m$, să se afle rezistența termică a lui:

$$R_T = g/(H \cdot \ell \cdot \lambda) = 1/30 \text{ } ^\circ C/W \cong 0,033 \text{ } ^\circ C/W$$

2. Ce flux termic se pierde prin acest perete iarna când temperatura afară este $t_{ext} = -10 \text{ } ^\circ C$, iar în cameră avem $t_{int} = 20 \text{ } ^\circ C$?

$$P_T = \Delta T / R_T = (t_{int} - t_{ext}) / R_T = 30 \text{ } ^\circ C / 0,033 \text{ } ^\circ C/W = 900 \text{ W}$$

3. Ce energie se consumă timp de o lună din această cauză ?

$$\begin{aligned} Q &= P_T \cdot t = 900 \text{ W} \cdot 30 \text{ zile} \cdot 24 \text{ h/zi} \cdot 3600 \text{ s/h} = \\ &= 900 \text{ W} \cdot 2,592 \cdot 10^6 \text{ s} = 2,3328 \cdot 10^9 \text{ J} \end{aligned}$$

4. Cât gaz metan (putere calorică $q = 35,5 \text{ MJ/m}^3$) trebuie ars pentru a produce această energie ?

$$Q = q \cdot V \Rightarrow$$

$$V = Q/q = 2,3328 \cdot 10^9 \text{ J} / (35,5 \cdot 10^6 \text{ J/m}^3) = 65,7 \text{ m}^3 \text{ CH}_4$$

Unități de măsură ale energiei:

$$1 \text{ kW} \cdot \text{h} = 10^3 \text{ W} \cdot 3,6 \cdot 10^3 \text{ s} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ J}$$

$$1 \text{ Gcal} = 10^9 \text{ cal} = 4,18 \cdot 10^9 \text{ J} \quad (=1,16 \cdot 10^3 \text{ kW} \cdot \text{h})$$

5. Cât gaz metan (putere calorică $q = 35,5 \text{ MJ/m}^3$) trebuie ars pentru a produce 1 Gcal ?

$$V = Q/q = 4,18 \cdot 10^9 \text{ J} / (35,5 \cdot 10^6 \text{ J/m}^3) = 117,88 \text{ m}^3 \text{ CH}_4 .$$

6. Cât gaz metan (putere calorică $q = 35,5 \text{ MJ/m}^3$) trebuie ars pentru a produce 1 kW h ?

$$V = Q/q = 3,6 \cdot 10^6 \text{ J} / (35,5 \cdot 10^6 \text{ J/m}^3) = 0,101 \text{ m}^3 \text{ CH}_4 .$$

PREȚURI [la momentul calculului 18 000 lei vechi/\$] acum
160L/Gcal

Energie	Preț comrcial	Conversie	Preț/MJ	raport
Electrică	600 lei/kWh	1kWh = 3,60 MJ	166,6 lei/MJ	r=6,57
Termică	270 klei/Gcal.	1Gcal = 4185 MJ	64,52 lei/MJ	r=2,54
Metan	900 lei/m ³ CH ₄	1m ³ CH ₄ = 35,5 MJ	25,35 lei/MJ	r=1

7. Care este rezistența termică a unui strat de vată minerală cu conductivitatea termică $\lambda = 0,05 \text{ W/(m K)}$ și grosimea de $g' = 3 \text{ cm}$ aplicat pe perete ($H=3\text{m}$, $\ell=5\text{m}$) ?

$$R_T' = g'/(H \cdot l \cdot \lambda) = 0,04 \text{ }^{\circ}\text{C/W}$$

8. Ce flux termic se pierde iarna când temperatura afară este $t_{\text{ext}} = -10 \text{ }^{\circ}\text{C}$, iar în cameră $t_{\text{int}} = 20 \text{ }^{\circ}\text{C}$, prin acest perete izolat termic?

$$P_T = \Delta T / (R_T + R_T') = (t_{\text{int}} - t_{\text{ext}}) / (R_T + R_T') = 30^{\circ}\text{C} / 0,0733 \text{ }^{\circ}\text{C/W} = 409,1 \text{ W}$$

Concluzie => 3 cm de vată minerală (polistiren expandat, etc.) izolează termic mai bine decât 40 cm de perete din cărămidă! Pierderile de căldură sunt **reduse la jumătate**, implicit **costurile !**

Valorile conductivității termice pentru materiale uzuale

Material	Conduct. termică [W/(m K)]	Densitate [kg/m ³]	Căldura specifică [J/(kg K)]	Căldura volumică [10 ⁶ J/(m ³ K)]
Zidărie	0,8	1700	880	
Cărămidă	0,8	1900	880	1,64
Lemn	0,3	820	2390	
Cauciuc	0,15	1200	1380	
Vată sticlă	0,05	200		
Plută	0,05	190		
Aer	0,025	1.3		
Bitum	0,09			
Fier	80	7900	450	3,55
Aluminiu	226	2700	880	2,37
Cupru	390	8960	380	3,4
Diamant	2300			
Porțelan	1,6			
Al ₂ O ₃	30			
Apa	0,58	1000	4185	4,185
Sticlă	0,84		837	

Conducție termică, transfer prin convecție (nivel avansat)
(Krasnoshchenkov – Problems in heat transfer, Editura Mir, p188)

Bară din Cu $D=15\text{mm}$, răcită cu aer având viteza $w_{\text{aer}} = 1\text{m/s}$,
 $t_{\text{aer}} = 20^\circ\text{C}$

Calculează coeficientul de transfer termic " α " și I_{max} cu condiția $t_{\text{max}} \leq 80^\circ\text{C}$. Rezistivitatea electrică a Cu este $r=0,0175 \Omega \cdot \text{mm}^2/\text{m}$.

Pentru $t_{\text{aer}} = 20^\circ\text{C}$ avem:

vâscozitatea		$\nu=15,06 \text{ m}^2/\text{s};$
conductivitatea termică		$\lambda=2,59 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$
coeficientul de transfer termic		$\alpha=\text{Nu} \cdot \lambda/d$
numărul Nusselt	$\text{Nu}=0,44 \cdot \text{Re}^{0,5}$ dacă	$10 \leq \text{Re} \leq 10^3$
numărul Nusselt	$\text{Nu}=0,22 \cdot \text{Re}^{0,6}$ dacă	$10^3 \leq \text{Re} \leq 2 \cdot 10^5$
numărul Reynolds	$\text{Re} = w \cdot d/\nu$	

$$\alpha \cdot (t_{\text{Cu}} - t_{\text{aer}}) \cdot \pi \cdot d \cdot L = I^2 \cdot R$$

Răspuns: $\alpha=23,8 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$; $I=825\text{A}$

Să vorbim în termeni practici despre căldură

În continuare este o prezentare simplificată a modului în care "curge" căldura, adică a felului în care are loc transferul de energie termică între un corp cald și un corp rece. Este "simplificată", dar este tehnică. Celor care au curajul să parcurgă materialul, le promit că vor găsi lucruri interesante printre formule.

Cum îți faci cafeaua? Capacitatea termică

Ca să îți faci cafeaua încălzești o cană cu apă. Ai 200 de grame de apă la 20°C pe care trebuie să le aduci la 100°C folosind un încălzitor electric de 200 W. Apa are **căldura specifică** "c" de 4180 J/(°C·kg), adică trebuie să îi dai 4180 Jouli unui kilogram de apă ca să îi crești temperatura cu 1°C. Căldura necesară încălzirii apei va fi:

$$Q = mc\Delta T = 66\,880 \text{ J}$$

unde "m" este masa apei, 0,2kg, "c" căldura ei specifică și $\Delta T = 100^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C} = 80^\circ\text{C}$ este variația de temperatură.

Această căldură e dată de încălzitorul electric. Energia termică generată de încălzitor se calculează înmulțind timpul cu puterea încălzitorului $W = P \cdot t$. Din egalarea celor două mărimi putem afla cât timp durează până se încălzește apa:

$$W = Q \Rightarrow t = Q/P = 334,4 \text{ secunde} \approx 5,57 \text{ minute}$$

Ce trebuie să reții de aici este că pentru a încălzi ceva ai nevoie de un interval de timp, a cărui mărime este dictată de puterea sursei de căldură, de variația de temperatură pe care vrei s-o obții și de **capacitatea calorică** a obiectului încălzit (produsul dintre căldura specifică și masa lui).

Cum "curge" căldura. Stări staționare

Așa cum deja s-a prezentat, dacă menții un capăt la temperatura mare T_1 și celălalt capăt la o temperatură mai mică decât prima, T_2 , prin bară va trece un **flux termic** P constant în timp (căldura transportată în unitatea de timp, Jouli/secundă=Watt), adică ai o stare staționară. Valoarea fluxului termic este dată de ecuația:

$$P = k \cdot S \cdot \Delta T / L$$

unde k este o constantă de proporționalitate care depinde de materialul din care este executată bara, numită **conductivitate**

termică ($\text{W}/(\text{m}^\circ\text{C})$). L este lungimea barei, adică distanța pe care se menține diferența de temperatură $\Delta T = T_1 - T_2$, iar $\Delta T/L$ (sau dT/dz , dacă axa orizontală este axă z) este gradientul de temperatură, iar S aria secțiunii transversale a barei. Corect, sub formă diferențială, ecuația transferului de căldură se scrie ca:

$$P = -k \cdot S \cdot dT/dz$$

unde semnul minus apare fiindcă fluxul de căldură este în sensul axei z atunci când temperatura **scade** în sensul axei z . Împărțind ecuația cu S , aria secțiunii barei, vom obține ecuația pentru densitatea fluxului de căldură:

$$P/S = -k \cdot dT/dz$$

sau forma ei tridimensională:

$$\mathbf{J}_T = -k \cdot \text{grad}T$$

unde $\mathbf{J}_T$ este vectorul densitate de flux termic (energia termică transferată în unitatea de timp prin unitatea de suprafață).

Ne vom limita la probleme simple unidimensionale, pentru care este cel mai util să folosim noțiunea de **rezistență termică**:

$$R_T = \Delta T/P_T$$

unde: $R_T = L/(S \cdot k)$ este **rezistența termică** $[R_T]_{SI} = ^\circ\text{C}/\text{W}$;

ΔT =diferența de temperatură ($^\circ\text{C}$);

P_T =curentul (fluxul) termic (W).

UN EXEMPLU UTIL

Știind $k=0,8 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$, conductivitatea termică a cărămidilor unui zid ce are înălțimea $H=3\text{m}$, lungimea $L=5\text{m}$ și grosimea $g=0,4\text{m}$, putem afla rezistența termică a zidului:

$$R_T = g/(H \cdot L \cdot k) = 1/30 \text{ } ^\circ\text{C}/\text{W} \cong 0,033 \text{ } ^\circ\text{C}/\text{W}$$

Știind rezistența termică a zidului putem afla ce flux termic se pierde prin acest perete iarna când în cameră avem temperatura $t_1 = 20^\circ\text{C}$, iar afară $t_2 = -10^\circ\text{C}$:

$$P_T = \Delta T/R_T = (t_1 - t_2)/R_T = 30^\circ\text{C} / 0,033^\circ\text{C/W} = 900 \text{ W}$$

Izolând termic peretele cu $g' = 10 \text{ cm}$ de polistiren expandat cu conductivitatea termică $\lambda = 0,05 \text{ W/(m K)}$, introducem o rezistență termică suplimentară:

$$R_T' = g'/(H \cdot L \cdot \lambda) = 0,666^\circ\text{C/W}$$

Această rezistență termică (de 20 de ori mai mare decât cea a zidăriei!) e parcursă de același flux termic ca și zidăria, adică este în serie cu rezistența termică a zidului. Fluxul termic prin peretele izolat termic atunci când afară sunt $t_{\text{ext}} = -10^\circ\text{C}$, iar în cameră $t_{\text{int}} = 20^\circ\text{C}$, va fi:

$$\begin{aligned} P_T &= \Delta T/(R_T + R_T') = (t_{\text{int}} - t_{\text{ext}})/(R_T + R_T') = \\ &= 30^\circ\text{C}/0,699^\circ\text{C/W} = 42,8 \text{ W} \end{aligned}$$

UN EXEMPLU BIO

Grosimea pielii "g" este de circa 2 mm, iar conductivitatea termică a pielii este aproximativ $4 \cdot 10^{-3} \text{ W/(cm}^\circ\text{C)}$. Rezistența termică a unui centimetru pătrat de piele ($S = 1 \text{ cm}^2$) va avea valoarea:

$$R_T = g/(S \cdot k) = 2 \cdot 10^{-1}/(1 \cdot 4 \cdot 10^{-3}) = 50^\circ\text{C/W}$$

Semnificația acestui rezultat este că un flux de energie termică de 1 W printr-o porțiune de piele cu suprafața de 1 cm^2 , va genera o diferență de temperatură de 50°C pe cei 2mm dintre suprafața pielii și stratul profund al ei! Deoarece de la radiația solară primim circa $1000 \text{ W/m}^2 = 0.1 \text{ W/cm}^2$, rezultă că suprafața pielii va fi cu 5°C mai caldă decât interiorul, acolo unde razele Soarelui cad perpendicular pe piele. Ce influență are unghiul de incidență?

Răspunsul la o schimbare bruscă de temperatură. Stări tranzitorii

Ce se întâmplă dacă introduci brusc mâna în apă caldă? Va apărea un flux de căldură dinspre apa caldă spre mâna ta. Căldura care este cedată de apa caldă va fi preluată de mâna ta care se va încălzi. Energia termică (căldura) acumulată de mână (capacitatea calorică a mâinii $\times$ variația temperaturii ei) este egală cu energia termică transportată de fluxul de căldura dinspre apă (fluxul $\times$ timpul dt). Fluxul termic se poate exprima ca un raport între diferența de temperatură dintre corpul cald și cel rece și rezistența termică de la suprafața lor de contact. Acest lucru se exprimă matematic prin intermediul unei ecuații de bilanț termic: căldura acumulată de mână = fluxul de căldura dinspre apă $\times$ timpul dt

$$H \cdot dT = (T' - T) \cdot dt / R \quad \text{sau} \quad H \cdot dT / dt = (T' - T) / R$$

unde: T – temperatura mâinii (variabilă în acest exemplu),
 dT – variația de temperatură a mâinii;
 T' – temperatura apei calde (considerată fixă);
 $H = m \cdot c$ – capacitatea termică = masă $\times$ căldura specifică;
 R – rezistența termică mână-apă (practic cea a pielii);
 t – timpul.

Soluția ecuației este:

$$T(t) = T' - (T' - T_0) \cdot e^{-t/\tau} = T_0 + (T' - T_0) \cdot (1 - e^{-t/\tau})$$

unde: T_0 -temperatura inițială a mâinii, la $t=0$; T' -temperatura apei calde dar și temperatura finală a mâinii la $t=\infty$; $\tau = H \cdot R$ o constantă de timp.

Constanta de timp $\tau = H \cdot R$ este cea care ne spune de cât timp este nevoie pentru a atinge temperatura finală de echilibru. Astfel diferența de temperatură dintre mână și apă este de 20 de

ori mai mică decât diferența inițială de temperatură după un timp egal cu trei constante de timp, iar după 5 constante de timp de 148 de ori mai mică. Iată un exemplu comun, atunci când îți iei temperatura. Pentru a indica temperatura corectă, termometrul trebuie ținut subraț câteva minute. Timpul de răspuns al termometrului este dat de capacitatea lui termică, practic de cât de mare este bulbul cu mercur (e mare – răspunde lent, e mic – răspunde rapid) și de rezistența termică dintre corp și termometru, ține-l cât mai strâns ca să ai un transfer termic cât mai bun.

Răspunsul unui termometru

Temperatura unui corp o măsurăm cu termometrul. Ne punem întrebarea "După cât timp vom putea citi temperatura corectă a corpului?". ***Timpul de răspuns*** al termometrului (în cât timp acesta ajunge la temperatura mediului de măsurat) se află din ***ecuația de bilanț termic***:

$$\begin{aligned} &\text{căldura acumulată de termometru } [H \cdot dT] = \\ &= \text{căldura schimbată cu mediul măsurat } [G' \cdot (T' - T) \cdot dt] + \\ &+ \text{căldura schimbată cu mediul ambiant } [G'' \cdot (T'' - T) \cdot dt] \end{aligned}$$

care este $\rightarrow H \cdot dT/dt = G' \cdot (T' - T) + G'' \cdot (T'' - T)$

unde: T – temperatura termometrului;

T' – temperatura mediului măsurat;

T'' – temperatura mediului ambiant;

$H = m \cdot c$ – capacitatea termică a termometrului;

G' – conductanța termică mediu măsurat-termometru;

G'' – conductanța termică mediu ambiant-termometru;

t – timpul.

Soluția ecuației este: $\Rightarrow$

$$T(t) = T_{\infty} - (T_{\infty} - T_0) \cdot e^{-t/\tau}$$

unde: T_0 – temperatura inițială a termometrului, la $t = 0$;
 $T_\infty = (G' \cdot T' + G'' \cdot T'') / (G' + G'')$ – temperatura la $t = \infty$;
 $\tau = H / (G' + G'')$ – constanta de timp.

Soluția găsită ne spune că **eroarea** făcută la citirea temperaturii la $t = \infty$, va fi:

$$\Delta T = T' - T_\infty = (T' - T'') \cdot G'' / (G' + G'')$$

adică este cu atât mai mică cu cât G'' (conductanța termică spre exterior) este mai mică comparativ cu G' (conductanța termică către mediul de măsurat). Categoric că dorim să avem $G'' \ll G'$.

Fiindcă citirea o facem la timpi finiți, atunci este util să știm ce erori facem din cauza acestui fapt. În funcție de constanta de timp termică " τ " a termometrului găsim că:

după $3 \cdot \tau$	eroarea este de $e^{-3} \cong 5\%$
după $5 \cdot \tau$	eroarea este de $e^{-5} \cong 0,7\%$

Dacă termometrul este de tip termorezistență, atunci trebuie să luăm în considerare autoîncălzirea termometrului datorită curentului electric ce trece prin el. **Autoîncălzirea** datorită puterii electrice disipate pe rezistența electrică R_0 prin care trece curentul I se reflectă în ecuația de funcționare ca:

$$H \cdot dT/dt = G' \cdot (T' - T) + G'' \cdot (T'' - T) + R_0 \cdot I^2$$

având soluția limită ($t \rightarrow \infty$):

$$T_{\infty i} = T_\infty + R_0 \cdot I^2 / (G' + G'')$$

Eroarea datorată autoîncălzirii este:

$$\Delta T = T_{\infty i} - T_\infty = R_0 \cdot I^2 / (G' + G'') \cong R_0 \cdot I^2 / G' = R' \cdot R_0 \cdot I^2$$

unde $R' = 1/G'$ este **rezistența termică** termometru-mediul măsurat.

Rezistența termică termometru-mediu măsurat se poate determina din două măsurători de temperatură făcute la doi curenți diferiți:

$$T_1 = T' + R' \cdot R_1 \cdot I_1^2$$

$$T_2 = T' + R' \cdot R_2 \cdot I_2^2$$

de unde rezistența termică termometru-mediu măsurat este:

$$R' = (T_2 - T_1) / (R_2 \cdot I_2^2 - R_1 \cdot I_1^2)$$

Relația devine mai simplă dacă putem considera $R_1 \cong R_2 \cong R_0$:

$$R' = (T_2 - T_1) / [R_0 \cdot (I_2^2 - I_1^2)]$$

Cum se împrășteie căldura. Încălzirea în volum

În exemplul precedent am presupus că mâna (corpul care primește căldura) are temperatura T **peste tot**, în tot volumul său, presupunere identică și pentru apa caldă (corpul care cedează căldură). Această presupunere poate funcționa în anumite cazuri, ca o aproximație, dar este greșită la modul general. Un exemplu practic te va lămuri ușor. Soarele este sursa de căldură a Terrei. Un acoperiș din tablă se încinge sub acțiunea razelor solare, iar temperatura tablei pe suprafața dinspre Soare va fi practic aceeași cu temperatura celeilalte suprafețe, dinspre casă. Este un caz în care funcționează bine presupunerea simplificatoare din exemplul precedent. Situația se schimbă total atunci când studiem fenomenul de încălzire a Pământului sub acțiunea radiației solare. Aici temperatura solului depinde de adâncime. Straturile de sol aflate mai la suprafață vor fi mai calde decât cele care sunt plasate mai profund.

În elementul de volum $S \cdot dz$ ("S" aria secțiunii, "dz" înălțimea lui) intră fluxul termic P și iese $P - dP$ după ce parcurge distanța dz , fiindcă o parte din fluxul termic (dP) este folosită pentru a încălzi zona traversată (elementul de volum $S \cdot dz$). Elementul

de volum primește în intervalul de timp "dt" energia termică $dP \cdot dt$ și se încălzește cu dT , energia termică acumulată fiind $\rho c S dz \cdot dT$ (masa " $\rho S dz$ ", căldura specifică " c "). Din egalarea energiei acumulate cu cea primită avem:

$$\rho c S dz \cdot dT = - dP \cdot dt \quad \text{sau} \quad \rho c S \cdot \partial T / \partial t = - \partial P / \partial z$$

Semnul minus apare din cauza faptului că fluxul P scade cu cât înaintază pe axa z . Fiindcă fluxul termic depinde de gradientul temperaturii ca:

$$P = - S k \cdot \partial T / \partial z$$

forma finală a ecuației pentru **difuzia căldurii** va fi:

$$\rho c \cdot \partial T / \partial t = k \cdot \partial^2 T / \partial z^2 \quad \text{sau} \quad \partial T / \partial t = K \cdot \partial^2 T / \partial z^2$$

unde $K = k / (\rho c)$ este **difuzivitatea termică** [m^2/s] a mediului care se încălzește.

Un caz interesant este cel al încălzirii solului. La suprafață, T , temperatura Pământului variază aproximativ sinusoidal, ziua crește și noaptea scade în jurul unei valori medii $\underline{T}$, care este și valoarea temperaturii solului la mare adâncime $T(\infty, t)$:

$$T(0, t) = \underline{T} + A_o \cdot \sin(2\pi t / t_o)$$

unde

$T(0, t)$ - temperatura la $z=0$ (suprafața solului)

$\underline{T}$ - temperatura medie la suprafața solului

A_o - amplitudinea variației temperaturii suprafeței

t_o - perioada, durata unei zile (24 ore = 86 400 s)

Soluția ecuației difuziei căldurii $\partial T / \partial t = K \cdot \partial^2 T / \partial z^2$ va fi:

$$T(z, t) = \underline{T} + A_o \cdot e^{-z/d} \cdot \sin(2\pi t / t_o - z/d)$$

unde $d = [t_o K / \pi]^{1/2}$ este "distanța de atenuare", adâncimea pe care amplitudinea variațiilor de temperatură ale lui $T(z, t)$ scade

de 2,7 ori și are o valoare uzuală de 20-30 cm pentru variațiile diurne de temperatură ale solului.

Reține din tot ce s-a discutat aici că în interiorul corpului încălzirea scade cu adâncimea exponențial și este în urma stimulului extern cu un timp proporțional cu adâncimea $\tau_0/(2\pi d)$.

Cazul în care grosimea corpului este mult mai mică decât "distanța de atenuare" (cazul tablei de pe acoperiș), face ca termenul exponențial să devină practic unitate și defazajul din termenul sinusoidal zero.

RADIAȚIA TERMICĂ

Radianța integrală.

Legea lui Stefan și Boltzmann

Orice corp radiază energie (unde electromagnetice) în mediul înconjurător, numită ***radiație termică*** și absoarbe din mediul înconjurător unde electromagnetice. Energia emisă depinde de temperatura corpului, indicând că energia internă a corpului se transformă în energie electromagnetică.

Energia emisă în unitatea de timp și pe unitatea de suprafață a corpului, se numește ***radianța integrală*** "R" și este direct proporțională cu temperatura absolută a corpului la puterea a patra (***legea Stefan – Boltzmann***):

$$R = \frac{\text{Energie}}{\text{timp} \times \text{suprafață}} = \varepsilon \cdot \sigma \cdot T^4 \quad [R]_{SI} = W/m^2 \quad (1)$$

unde:

$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} W/(m^2 \cdot K^4)$, constanta Stefan-Boltzmann;
 ε - emisivitatea suprafeței ($0 < \varepsilon < 1$) depinde de material,
 $\varepsilon = 0$ corp alb; $\varepsilon = 1$ corp negru; $0 < \varepsilon < 1$ corp gri.

Dacă corpurile doar ar emite radiație termică, energia lor internă și implicit temperatura ar tinde la zero. Fiindcă mediul înconjurător are o anumită temperatură, corpurile emit și

absorb radiație până ajung la temperatura mediului când se realizează un echilibru între radiația emisă și cea absorbită.

Exemple

1. Puterea radiată de corpul omenesc:

–Suprafața corpului $S = 1 \text{ m}^2$ emisivitatea $\varepsilon = 1$

–Temperatura corpului $t = 37^\circ\text{C} = 310 \text{ K}$ ($T^4 = 9,2 \cdot 10^9 \text{ K}^4$)

$$\text{Puterea radiată} \quad P = \varepsilon \sigma S T^4 = 523 \text{ W}$$

Trebuie să ținem seama de puterea primită de la mediul înconjurător.

–Temperatura mediului $T' = 22^\circ\text{C} = 295 \text{ K}$ ($T'^4 = 7,5 \cdot 10^9 \text{ K}^4$)

$$\text{Puterea absorbită} \quad P' = \varepsilon \cdot \sigma \cdot S \cdot T'^4 = 425 \text{ W}$$

Puterea pierdută de corp = Putere radiată – Putere absorbită

$$P'' = P - P' = \varepsilon \sigma S (T^4 - T_o^4) = 98 \text{ W}.$$

2. Puterea radiată de Soare spre Pământ:

Raza Soarelui $R_S = 7 \cdot 10^8 \text{ m};$

Raza Pământului $R_P = 6,4 \cdot 10^6 \text{ m};$

Distanța Soare – Pământ $R_{SP} = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m};$

Temperatura coroanei solare $T = 6000 \text{ K}.$

Puterea emisă de suprafața Soarelui:

$$P_S = \varepsilon \cdot \sigma \cdot S \cdot T^4 = 4\pi R_S^2 \cdot \sigma \cdot T^4 = 4,52 \cdot 10^{26} \text{ W}$$

se distribuie uniform pe o sferă cu raza R_{SP} :

$$\begin{aligned} P_S / S_{SP} &= 4\pi R_S^2 \cdot \sigma \cdot T^4 / (4\pi R_{SP}^2) = (R_S / R_{SP})^2 \cdot \sigma \cdot T^4 = \\ &= 1,6 \cdot 10^3 \text{ W/m}^2 \end{aligned}$$

Valoarea standard a intensității radiației solare în exteriorul atmosferei:

$$I_0 = 1353 \text{ W/m}^2 \text{ (NASA / ASTM)}$$

Atmosfera absoarbe 22% din radiație. Prezența norilor, praful în suspensie, alternanța zi-noapte și succesiunea anotimpurilor reduce fluxul de energie la o valoare medie anuală de circa 5 ori mai mică de 170–200 W/m².

3. *Senzori pentru radiația infraroșie*

Omul poate simți radiația termică din domeniul IR cu ajutorul receptorilor de temperatură din piele, putând constata că un obiect este fierbinte doar apropiind dosul mâinii de el fără a-l atinge. În comerț există dispozitive capabile să simtă prezența unui om de la o distanță de la 1 la 10 m (senzori PIR – piroelectrici). Putem evalua schimbarea de temperatură a senzorului datorită prezenței omului folosind legea Stefan – Boltzmann. Considerăm omul ca fiind o sferă radiantă cu suprafața de 1 m² ($r \cong 28$ cm) având temperatura T de 37°C (310 K), aflată la distanța $R = 10$ m de senzorul cu suprafața S_s și temperatura T_s . Mediul are temperatura $T_o = 22^\circ\text{C} = 295$ K .

Puterea emisă suplimentar de corpul omenesc este:

$$P = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \varepsilon \cdot \sigma \cdot (T^4 - T_o^4)$$

care la distanța R crează o densitate de putere pe unitatea de suprafață:

$$p' = P / (4\pi R^2) = (r/R)^2 \cdot \varepsilon \cdot \sigma \cdot (T^4 - T_o^4)$$

de unde puterea primită prin radiație de senzor este:

$$P_{\text{primit}} = p' \cdot S_s = S_s \cdot (r/R)^2 \cdot \varepsilon \cdot \sigma \cdot (T^4 - T_o^4)$$

iar cea emisă suplimentar de senzor datorită încălzirii este:

$$P_{\text{cedat}} = S_s \cdot \varepsilon \cdot \sigma \cdot (T_s^4 - T_o^4)$$

La echilibru cele două fluxuri de energie se egalează:

$$S_s \cdot (r/R)^2 \cdot \varepsilon \cdot \sigma \cdot (T^4 - T_o^4) = S_s \cdot \varepsilon \cdot \sigma \cdot (T_s^4 - T_o^4)$$

Se observă că aria suprafeței senzorului se simplifică, deci ea nu contează în acest proces. Fiindcă temperaturile T_s și T_o sunt foarte apropiate ca valoare atunci putem face următoarea aproximație:

$$T_s^4 - T_o^4 = (T_s^2 - T_o^2) \cdot (T_s^2 + T_o^2) = (T_s - T_o) \cdot (T_s + T_o) (T_s^2 + T_o^2) \cong \\ \cong (T_s - T_o) \cdot (T_o + T_o) \cdot (T_o^2 + T_o^2) = 4 \cdot T_o^3 \cdot (T_s - T_o)$$

care poate fi aplicată chiar pentru corpul radiant (eroare < 20%).

Notând cu: $\Delta T = T - T_o$ și $\Delta T_s = T_s - T_o$

avem: $\Delta T_s = (r/R)^2 \cdot (T^4 - T_o^4) / (4 \cdot T_o^3) \cong (r/R)^2 \cdot \Delta T$

Dacă pentru simplitatea calculelor luăm $r=25\text{cm}$ și $R=10\text{m}$, $\Delta T=16^\circ\text{C}$, atunci:

$$\Delta T_s = 1 \cdot 10^{-2} \text{ } ^\circ\text{C}.$$

În practică fiind vorba de un proces dinamic (încălzirea senzorului are loc într-o fracțiune de secundă până la o secundă) această valoare este mai mică cu circa 2 ordine de mărime ($10^{-4} \text{ } ^\circ\text{C}$).

Spectrul radiației termice. Legea lui Wien

Radiația unui corp incandescent trimisă către o prismă este descompusă în radiații monocromatice. Domeniul radiațiilor vizibile se poate observa cu ochiul liber. Folosind instrumente potrivite se poate detecta prezența radiațiilor electromagnetice și în afara domeniului vizibil, respectiv domeniul radiațiilor infraroșii (IR) cu lungimea de undă mai mare decât a celor roșii ($\lambda > 7200\text{\AA} = 720\text{nm} = 0,72\mu\text{m}$) și domeniul radiațiilor ultraviolete (UV) cu lungimea de undă mai mică decât a celor violete ($\lambda < 4000\text{\AA} = 400\text{nm} = 0,4\mu\text{m}$).

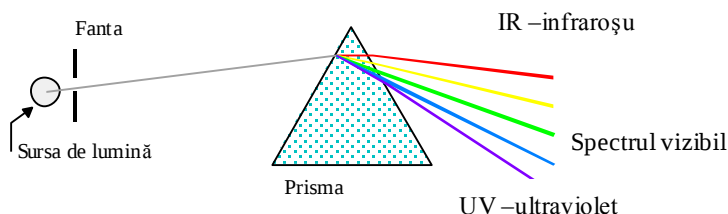


Figura 1. Radiația electromagnetică este sesizată de ochiul uman doar pentru lungimi de undă de la 0,4 la 0,7 μm , peste 0,7 μm avem radiația infraroșie (IR), iar sub 0,4 μm radiația ultravioletă (UV).

Se constată experimental că în funcție de temperatura corpului încălzit se modifică culoarea acestuia, frecvența predominantă crescând cu temperatura, respectiv lungimea de undă pentru care emisia de radiație este maximă scade cu creșterea temperaturii corpului după *legea lui Wien*:

$$\lambda_m \cdot T = b \quad (2)$$

unde : b – constanta lui Wien – $2,898 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$,

λ_m – lungimea de undă la care apare maximul de emisie.

Scara de culoare:

532 °C – roșu închis
 747 °C – vișiniu,
 835 °C – roșu deschis,
 899 °C – portocaliu,
 966 °C – galben,
 1205 °C – alb.

Distribuția radiației după lungimea de undă. Legea lui Planck

Distribuția energiei radiației termice emise de un corp după lungimea de undă a fost dedusă de Max Planck în ipoteza

schimbului cuantificat de energie dintre corp și mediu. Energia fotonului, unei electromagnetice elementare, este:

$$E = h \cdot \nu = h \cdot c / \lambda$$

iar energia radiației termice va fi:

$$W = n \cdot h \cdot \nu = n \cdot h \cdot c / \lambda \quad (3)$$

unde: W – energia schimbată

n – numărul de cuante (1, 2, 3, 4...)

$h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ J·s – constanta lui Planck

ν – frecvența unei electromagnetice

$c = 3 \cdot 10^8$ m/s – viteza luminii

$\lambda = c/\nu$ – lungimea de undă a unei electromagnetice

Distribuția după lungimea de undă a radiației termice este dată de **radianța spectrală** " R_λ " (o densitate spectrală a puterii emise pe unitatea de suprafață, adică putere emisă pe unitatea de suprafață și unitatea de interval de lungimi de undă) și reprezintă **legea lui Planck**:

$$R_\lambda = \frac{2\pi \cdot h \cdot c^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h \cdot c}{\lambda \cdot k \cdot T}} - 1} = T^5 \cdot \frac{2\pi \cdot k_B^5}{h^4 \cdot c^3} \cdot \frac{x^5}{e^x - 1} \quad (4)$$

unde: $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23}$ J/K – constanta Boltzmann

iar " x " este o mărime adimensională, raportul dintre energia fotonului " $h\nu$ " și energia termică " $k_B \cdot T$ ":

$$x = hc/(\lambda \cdot k_B \cdot T) = h\nu/(k_B \cdot T) = 0,01441/(\lambda \cdot T) \quad (5)$$

Putem calcula valoarea radianței spectrale normate:

$$R_\lambda / [2 \cdot \pi \cdot k_B^5 \cdot T^5 / (h^4 \cdot c^3)] = R_\lambda / (6 \cdot 10^{-7} \cdot T^5) = x^5 / (e^x - 1) [W/(m^2 \cdot m \cdot K^5)] \quad (6)$$

în funcție de " x " care este proporțional cu frecvența " ν " sau de " $1/x$ " care este proporțional cu lungimea de undă " λ ", ca în tabelul alăturat.

Tabelul 1. Valorile numerice pentru mărimile adimensionale "x" și radianța spectrală normală

$x \sim \nu$	$1/x \sim \lambda$	$x^5/(e^x-1) \sim R_\lambda/T^5$	Observații
0,1	10	$9,508 \cdot 10^{-5}$	
0,2	5	$1,445 \cdot 10^{-3}$	
0,5	2	$4,817 \cdot 10^{-2}$	
1	1	$5,82 \cdot 10^{-1}$	
2	0,5	5	
5	0,2	21,2	aici e maximul
10	0,1	4,54	
20	0,05	$6,595 \cdot 10^{-3}$	
30	0,033	$2,27 \cdot 10^{-6}$	
50	0,02	$6,027 \cdot 10^{-14}$	

În figura 2 avem graficul radianței spectrale normale în funcție de "1/x". Se observă scăderea rapidă a densității spectrale de radiație către lungimi de undă scurte $1/x \rightarrow 0$ (energii mari ale fotonilor, cuantele radiației electromagnetice).

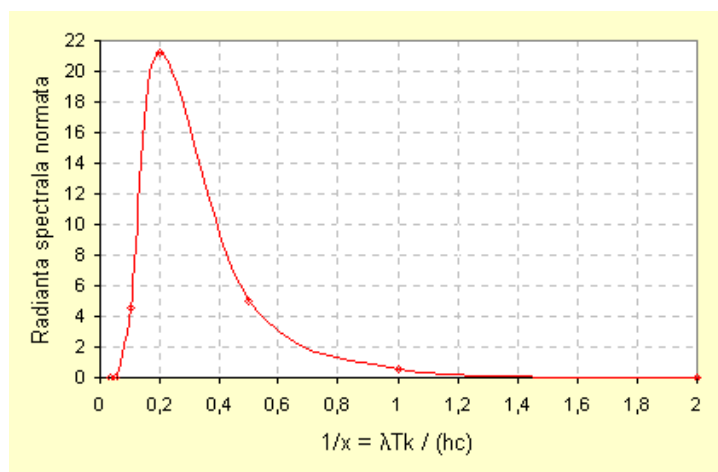


Figura 2. Radianța spectrală normală " $R_\lambda/(6 \cdot 10^{-7} \cdot T^5)$ " în funcție de " $1/x = \lambda \cdot k_B \cdot T / (hc)$ ", practic lungimea de undă.

În reprezentare dublu logaritmică a radianței spectrale, figura 3, se vede și mai clar scăderea mai rapidă a densității spectrale de radiație către lungimile de undă scurte și mai puțin rapidă către lungimile de undă mari.

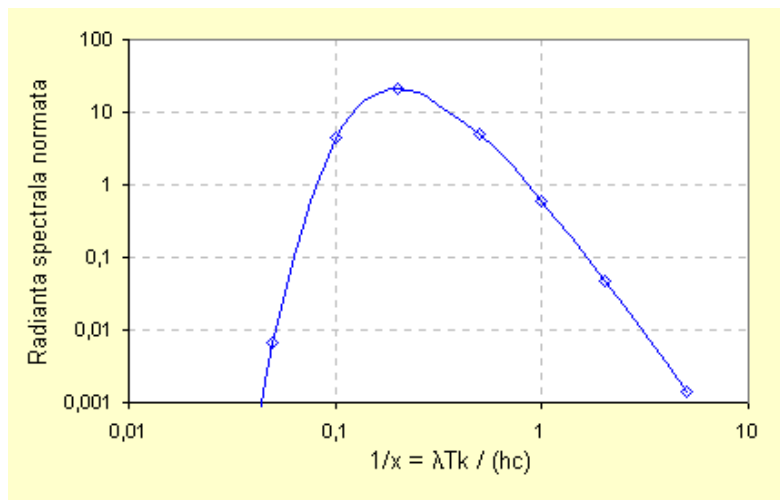


Figura 3. Graficul în scală dublu logaritmică al radianței spectrale normalizate " $R_\lambda / (6 \cdot 10^{-7} \cdot T^5)$ " în funcție de " $1/x = \lambda \cdot k_B \cdot T / (hc)$ ", practic lungimea de undă normalizată.

De reținut maximum radianței spectrale la $x=5$, corespunde legii lui Wien. Din tabelul 1 se poate calcula radianța spectrală corespunzătoare unui corp cu temperatura T , în funcție de lungimea de undă a radiației după metoda descrisă mai jos.

Fie $T = 3000 \text{ K}$ (temperatura filamentului de bec incandescent)

Din coloana $1/x \Rightarrow \lambda (\mu\text{m}) = (14410/T) \cdot (1/x)$

Din coloana $x^5 / (e^x - 1) \Rightarrow$

$$R_\lambda (\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \mu\text{m})) = 6 \cdot 10^{-13} \cdot T^5 \cdot [x^5 / (e^x - 1)]$$

Tabelul 2. Valorile calculate al radianței spectrale R_λ pentru $T=3000K$. S-a marcat linia corespunzătoare maximului de emisie (gri) și cele două valori ale lungimii de undă care sunt la capătul spectrului vizibil (roșu și albastru).

λ (μm)	$1/x \sim \lambda$	$x^5/(e^x-1) \sim R_\lambda/T^5$	$R_\lambda(W/(m^2 \cdot \mu m))$	$R_\lambda/R_{\lambda_{max}}$
12	2	$4,817 \cdot 10^{-2}$	$7 \cdot 10^3$	
4,8	1	$5,82 \cdot 10^{-1}$	$8,5 \cdot 10^4$	
2,4	0,5	5	$7,3 \cdot 10^5$	0,236
1,92	0,4	8,733	$12,7 \cdot 10^5$	0,41
1,44	0,3	15,22	$22,2 \cdot 10^5$	0,718
0,96	0,2	21,2	$30,9 \cdot 10^5$	1
0,72	0,15	16,78	$24,4 \cdot 10^5$	0,79
0,66	0,1374	14,1	$20,5 \cdot 10^5$	0,663
0,6	0,1249	10,97	$16 \cdot 10^5$	0,518
0,576	0,12	9,66	$14,1 \cdot 10^5$	0,45
0,48	0,1	4,54	$6,6 \cdot 10^5$	0,213
0,24	0,05	$6,595 \cdot 10^{-3}$	$9,6 \cdot 10^2$	

Exemple

Să calculăm maximul radianței spectrale la temperatura de $27^\circ C$, $T=300K$:

$$R_{\lambda_{max}} = T^5 \cdot 6 \cdot 10^{-7} \cdot 21,2 = T^5 \cdot 1,28 \cdot 10^{-5} \text{ W}/(m^2 \cdot m)$$

$$R_{\lambda_{max}} = 31,1 \text{ W}/(m^2 \cdot \mu m)$$

Fiindcă:

$$R_\lambda = T^5 \cdot [2 \cdot \pi \cdot k_B^5 / (h^4 \cdot c^3)] \cdot x^5 / (e^x - 1)$$

$$x = hc / (\lambda \cdot k_B \cdot T) = hv / (k_B \cdot T)$$

la lungimi de undă mici (energie mare a fotonului, $x > 5$) putem aproxima:

$$1/(e^x-1) \cong 1/e^x = e^{-x}$$

obținând legea lui Wien:

$$R_\lambda = T^5 \cdot [2 \cdot \pi \cdot k_B^5 / (h^4 \cdot c^3)] \cdot x^5 \cdot e^{-x} = T^5 \cdot x^5 \cdot e^{-x} \cdot 6 \cdot 10^{-7} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{m})$$

iar la lungimi de undă mari (energie mică a fotonului, $x < 0,3$)
putem aproxima:

$$1/(e^x-1) \cong 1/x$$

obținând legea lui Rayleigh-Jeans:

$$R_\lambda = T^5 \cdot [2 \cdot \pi \cdot k_B^5 / (h^4 \cdot c^3)] \cdot x^4 = T^5 \cdot x^4 \cdot 6 \cdot 10^{-7} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{m})$$

TEORIA LUI MAX PLANCK (nivel avansat)

Pentru cei interesați de modul în care a fost dedusă distribuția energiei termice emise după lungimea de undă sau frecvența radiației emise, prezint o schiță a acestui raționament, care a constituit punctul de plecare a teoriei cuantice. Max Planck stabilește în 1900 o lege a radiației corpului negru care se verifică experimental în toate regiunile spectrale. El postulează că la scară atomică fragmentarea spațiului fazelor sub un anumit volum minim este lipsită de sens. Spațiul fazelor este cel care conține coordonatele de poziție și impuls având 6 dimensiuni. Pentru un sistem unidimensional spațiul fazelor are doar două dimensiuni ca în cazul oscilatorului armonic.

Energia oscilatorului armonic se poate scrie ca:

$$E_C + E_P = W \quad (1)$$

unde:

$$E_C = \frac{p^2}{2m} \quad (2)$$

$$E_P = \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega^2 x^2}{2}$$

Rescriem (1) ca:

$$\frac{p^2}{2mW} + \frac{x^2}{\frac{2W}{m\omega^2}} = 1 \quad (3)$$

și fiindcă pentru o stare dată W și ω sunt constante, atunci (3) devine ecuația unei elipse în spațiul fazelor (p, x):

$$\frac{p^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad (4)$$

Aria elipsei este:

$$\oint \rho \cdot dx = \pi \cdot a \cdot b = \pi \cdot \sqrt{2mW} \cdot \sqrt{\frac{2W}{m\omega^2}} = \frac{W}{\nu} \quad (5)$$

și reprezintă din punct de vedere fizic mărimea numită **acțiune** (dimensional este *energie*×*timp*). Trecerea de la o stare la alta implică modificarea ariei, deci a acțiunii, fără modificarea frecvenței care este o caracteristică intrinsecă a oscilatorului armonic (dată de masa sa și constanta de elasticitate).

Postulatul lui Planck implică relația:

$$\frac{W}{\nu} = nh \quad (6)$$

unde $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ J·s reprezintă acțiunea minimă la nivel microscopic, numită constanta lui Planck. Energia se poate scrie atunci ca:

$$W_n = n \cdot h \cdot \nu \quad (7)$$

de unde se vede că schimbul de energie dintre oscilator și mediu se poate face doar în porții ($h \cdot \nu$) fixe, numite cuante.

Asociind comportarea undelor electromagnetice din interiorul cavității dintr-un corp cu comportarea unui oscilator armonic, adică energia lor se poate scrie ca în relația (7) și că din punct de vedere statistic numărul oscilatorilor N_n cu energia W_n este dat de distribuția Boltzmann:

$$N_n = N_0 \cdot e^{-\frac{n \cdot h \cdot \nu}{k_B T}} \quad (8)$$

atunci numărul total de oscilatori (unde electromagnetice) din cavitate va fi:

$$N = \sum_n N_n = N_0 \sum_n \left(e^{-\frac{h\nu}{kT}} \right)^n \quad (9)$$

o cantitate constantă fiindcă suntem într-o situație de echilibru a radiației din cavitate cu pereții cavității. Expresia din relația (9) este o progresie geometrică, cu rație subunitară:

$$1 - q^n = (1 - q) \cdot (1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) \quad (10)$$

care tinde la zero când exponentul tinde la infinit, de unde:

$$N = N_0 \frac{1}{1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}} \quad (11)$$

care ne permite aflarea lui N_0 cunoscând numărul total de cuante N :

$$N_0 = N \left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}} \right) \quad (12)$$

Energia totală a radiației de frecvență ν va fi:

$$W = \sum_n N_n W_n = N_0 \sum_n \left(e^{-\frac{nh\nu}{k_B T}} \cdot n \cdot h \cdot \nu \right) \quad (13)$$

unde folosind un truc matematic se poate rescrie ca:

$$W = N_0 \sum_n n \cdot h \cdot \nu \cdot e^{-\frac{n \cdot h \cdot \nu}{kT}} = -N_0 \frac{\partial}{\partial \left(\frac{1}{kT} \right)} \sum_n e^{-\frac{n \cdot h \cdot \nu}{kT}} \quad (14)$$

expresie ce poate fi evaluată ușor:

$$W = -N_0 \frac{\partial}{\partial \left(\frac{1}{kT} \right)} \frac{1}{1 - e^{-\frac{h \cdot \nu}{k_B T}}} = N_0 \frac{h \cdot \nu \cdot e^{-\frac{h \cdot \nu}{kT}}}{\left(1 - e^{-\frac{h \cdot \nu}{kT}} \right)^2} \quad (15)$$

pusă sub o formă mai simplă prin folosirea expresiei (12) pentru N_0 , apoi amplificând fracția cu $e^{h\nu/(kT)}$:

$$W = N \frac{h \cdot \nu}{e^{\frac{h \cdot \nu}{k_B T}} - 1} \quad (16)$$

Din relația (16) se găsește imediat energia medie a unei unde de frecvență ν :

$$\bar{w} = \frac{W}{N} = \frac{h \cdot \nu}{e^{\frac{h \cdot \nu}{k_B T}} - 1} \quad (17)$$

În continuare trebuie să găsim câte stări de frecvență ν sunt posibile în interiorul cavității cubice de latură L . Pe o coardă de lungime L se formează unde staționare dacă:

$$L = n \cdot \frac{\lambda}{2} \quad (18)$$

unde λ este lungimea de undă, iar $n=1, 2, \dots$. Condiția (18) este echivalentă cu afirmația că vectorul de undă $k = 2\pi/\lambda$ este:

$$k = \frac{n \cdot \pi}{L} \quad (19)$$

În trei dimensiuni, în cavitatea cubică de latură L , fiecare componentă a vectorului de undă trebuie să satisfacă o relație de tipul:

$$k_i = \frac{n_i \pi}{L} \quad i=1,2,3,\dots \quad (20)$$

pentru a se forma o undă staționară în interiorul cavității cubice. Modulul vectorului de undă va fi:

$$k^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 \quad (21)$$

sau

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 = \left(\frac{n_1 \cdot \pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{n_2 \cdot \pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{n_3 \cdot \pi}{L}\right)^2 \quad (22)$$

Folosind relația dintre frecvență ν , lungime de undă λ și viteza de propagare a mediului c :

$$\lambda \cdot \nu = c \quad (23)$$

rescriem (22) ca:

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = \left(\frac{2L\nu}{c}\right)^2 \quad (24)$$

În spațiul "n" al numerelor cuantice n_1, n_2, n_3 , unei unde staționare de frecvență ν , îi corespund puncte aflate la aceeași distanță de origine pe o suprafață sferică de rază $r = 2L\nu/c$, conform relației (24). Unui punct din spațiul "n" (un grup de trei numere n_1, n_2, n_3) îi corespunde o stare, respectiv o undă staționară. Fiecărui punct îi corespunde un volum elementar cubic cu latură unitate ($\Delta n_i = 1$) și implicit volum unitate. La întrebarea "Câte stări sunt cu frecvența cuprinsă între zero și ν ?" răspunsul este "Câte puncte (cuburi elementare) se află în interiorul sferei corespunzătoare frecvenței ν în partea pozitivă a axelor "n" (1/8 din volumul sferei)", altfel spus volumul corespunzător din sferă este:

$$S = \frac{1}{8} \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot \left(\frac{2 \cdot L \cdot \nu}{c}\right)^3 \cdot 2 \quad (25)$$

Multiplicarea cu 2 din relația (25) apare ca urmare a faptului că o undă staționară poate avea două orientări posibile ale direcției de oscilație (polarizări). Numărul stărilor din unitatea de volum cu frecvența mai mică decât ν , va fi:

$$s = \frac{S}{L^3} = \frac{8\pi\nu^3}{3c^3} \quad (26)$$

Numărul stărilor cu frecvența cuprinsă între ν și $\nu + d\nu$ va fi:

$$ds = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} d\nu \quad (27)$$

și fiindcă din relația (17) fiecare stare are energia medie " $h\nu/(e^{h\nu/(kT)} - 1)$ ", atunci energia corespunzătoare intervalului de frecvență " $d\nu$ " va fi :

$$dw = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\nu \quad (28)$$

sau densitatea spectrală de energie:

$$E_\nu = \frac{dw}{d\nu} = \frac{8\pi \cdot h \cdot \nu^3}{c^3 \left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1 \right)} \quad (29)$$

E_ν reprezintă distribuția energiei radiate după frecvență, ν . Distribuția energiei radiate după lungimea de undă, densitatea spectrală de energie E_λ , o putem afla ținând cont că:

$$E_\lambda \cdot d\lambda = E_\nu \cdot d\nu = E_\nu \cdot d\left(\frac{c}{\lambda}\right) = -E_\nu \cdot \frac{c}{\lambda^2} \cdot d\lambda$$

sau neglijând semnul (sensul variației lui λ contrar celui lui ν) obținem **formula lui Planck**:

$$E_{\lambda} = \frac{8 \cdot \pi \cdot h \cdot c}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h \cdot c}{k \cdot T \cdot \lambda}} - 1} \quad (30)$$

Din relația (28) obținem prin integrare densitatea de energie electromagnetică în interiorul cavității:

$$w = \int_0^{\infty} \frac{8\pi h}{c^3} \cdot \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\nu = \frac{8\pi \cdot k_B^4 \cdot T^4}{c^3 h^3} \int_0^{\infty} \frac{\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right)^3 \cdot d\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right)}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \quad (31)$$

fiindcă:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$$

atunci:

$$w = \frac{8 \cdot \pi^5 \cdot k_B^4}{15 \cdot c^3 \cdot h^3} \cdot T^4 \quad (32)$$

Între densitatea de energie electromagnetică "w" din cavitate și radianța "R" a suprafeței corpului solid există relația:

$$R = \frac{w \cdot c}{4} \quad (33)$$

Radiația din cavitate este în echilibru cu suprafața corpului, adică cantitatea de energie electromagnetică care ajunge la suprafață fiind absorbită, este egală cu cantitatea de energie pe care o emite suprafața.

Dacă facem un raționament analog celui pentru deducerea formulei presiunii în teoria cinetico-moleculară a gazelor, unde "w" reprezintă numărul de particule din unitatea de volum, din care 1/3 se mișcă pe direcția perpendiculară pe suprafața S și din aceasta doar jumătate către suprafață, atunci în intervalul de

timp Δt ajung la suprafața S doar $1/6$ din particulele aflate în cilindrul de bază S și înălțime " $c \Delta t$ ". Corespunzător unității de suprafață și unității de timp vom avea:

$$R = \frac{S \cdot c \cdot \Delta t \cdot w}{S \cdot \Delta t} \cdot \frac{1}{6} = \frac{w \cdot c}{6} \quad (34)$$

Raționamentul precedent nu este riguros, el doar ilustrează calitativ modul în care se realizează echilibrul dintre radiația termică din cavitate cu pereții cavității. Un calcul exact, dar mult mai laborios, obține la numitor 4, nu 6.

Folosind relația (32) pentru densitatea de energie electromagnetică " w " din cavitate și relația corectă (33) pentru densitatea fluxului de putere obținem pentru radiația totală formula:

$$R = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 \cdot c^2 \cdot h^3} \cdot T^4 \quad (35)$$

corespunzătoare *legii Stefan și Boltzmann* cu constanta Stefan-Boltzmann:

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 \cdot c^2 \cdot h^3} = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/(m}^2 \cdot \text{K}^4) \quad (36)$$

Pentru a deduce *legea deplasării a lui Wien* cerem ca derivata după λ a lui E_λ din relația (20) să se anuleze (condiție de extremum). Introducând variabila adimensională:

$$x = h \cdot c / (\lambda \cdot k_B T) = h \cdot \nu / (k_B T) \quad (37)$$

această derivată se reduce la ecuația:

$$\frac{x \cdot e^x}{e^x - 1} = 5 \quad (38)$$

care are soluția unică $x = 4,965$, echivalent cu:

$$\lambda_m \cdot T = \frac{h \cdot c}{4,965 \cdot k_B} = 2,9 \cdot 10^{-3} m \cdot K \quad (39)$$

Conform cu ecuațiile (30), (29) și (33), radiația spectrală (distribuția după frecvență sau după lungimea de undă) va fi:

$$R_\nu = \frac{E_\nu \cdot c}{4} = \frac{2\pi \cdot h \cdot \nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad [R_\nu]_{SI} = \frac{W}{m^2 \cdot Hz} \quad (40)$$

$$R_\lambda = \frac{E_\lambda \cdot c}{4} = \frac{2\pi \cdot h \cdot c^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \quad [R_\lambda]_{SI} = \frac{W}{m^2 \cdot m} \quad (41)$$

Relațiile (40) și (41) le putem rearanja sub forma:

$$R_\nu = T^3 \cdot \frac{2\pi \cdot k_B^3}{h^2 \cdot c^2} \cdot \frac{x^3}{e^x - 1} \quad (42)$$

$$R_\lambda = T^5 \cdot \frac{2\pi \cdot k_B^5}{h^4 \cdot c^3} \cdot \frac{x^5}{e^x - 1} \quad (43)$$

Aceste forme sunt utile pentru a determina maximul de emisie spectrală ce are loc conform (38) când:

$$x_{\max} = \frac{h \cdot c}{k_B \cdot T \cdot \lambda_{\max}} \equiv \frac{h \cdot \nu_{\max}}{k_B \cdot T} = 4,965....(\cong 5) \quad (44)$$

și mai ales modul de variație cu temperatura al maximului de emisie, dat fiind faptul că tot ce este după factorul temperatură reprezintă constante. Formulele (42) și (43) reprezintă curbe universale ale radiației spectrale R_λ în funcție de $x=hc/(\lambda \cdot k_B \cdot T) = h\nu/(k_B \cdot T)$ în care temperatura apare doar ca un factor de amplificare. Făcând înlocuirile numerice pentru constantele universale și punând $x_{\max}=5$, putem rescrie relația (43) ca:

$$R_{\lambda_{\max}} = T^5 \cdot 6,026 \cdot 10^{-7} \cdot 21,2 = T^5 \cdot 1,28 \cdot 10^{-5} W/(m^2 \cdot m)$$

$$R_{\lambda_{\max}} = 1,28 \cdot 10^{-11} \cdot T^5 W/(m^2 \cdot \mu m) \quad (45)$$

unde: $2 \cdot \pi \cdot k_B^5 / (h^4 \cdot c^3) = 6,026 \cdot 10^{-7}$ și $5^5 / (e^5 - 1) = 21,2$.

De exemplu, să calculăm maximumul radianței spectrale la temperatura de 27°C, $T = 300\text{K}$:

$$R_{\lambda_{\max}} = T^5 \cdot 1,28 \cdot 10^{-5} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{m}) = 31,1 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \mu\text{m})$$

Fiindcă:

$$R_{\lambda} = T^5 \cdot [2 \cdot \pi \cdot k_B^5 / (h^4 \cdot c^3)] \cdot x^5 / (e^x - 1)$$

$$x = hc / (\lambda \cdot k_B \cdot T) = h\nu / (k_B \cdot T)$$

la *lungimi de undă mici* (energie mare a fotonului, $x > 5$) putem aproxima:

$$1/(e^x - 1) \cong 1/e^x = e^{-x}$$

obținând o *altă lege a lui Wien* (pentru distribuția spectrală, nu pentru maxim):

$$R_{\lambda} = T^5 \cdot [2 \cdot \pi \cdot k_B^5 / (h^4 \cdot c^3)] \cdot x^5 \cdot e^{-x} = T^5 \cdot x^5 \cdot e^{-x} \cdot 6 \cdot 10^{-7} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{m})$$

La *lungimi de undă mari* (energie mică a fotonului, $x < 0,3$) putem aproxima:

$$1/(e^x - 1) \cong 1/x$$

obținând *legea lui Rayleigh-Jeans*:

$$R_{\lambda} = T^5 \cdot [2 \cdot \pi \cdot k_B^5 / (h^4 \cdot c^3)] \cdot x^4 = T^5 \cdot x^4 \cdot 6 \cdot 10^{-7} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{m})$$

Probleme de radiație termică

1. Ce putere radiază într-o cameră cu $t_0 = 27^\circ\text{C}$ o sobă cu temperatura $t=67^\circ\text{C}$ și dimensiunile $1,5 \times 0,7 \times 0,7 \text{ m}$?
2. Ce putere trebuie furnizată unui panou pătrat cu latura de $0,5 \text{ m}$ pentru a-l încălzi până la temperatura de 127°C ? Temperatura mediului e de 27°C , constanta Stefan-Boltzmann $5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$ și emisivitatea 1.
3. Ce temperatură atinge un fir drept din aliaj NiCr cu rezistivitatea $121 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$, diametrul $0,2 \text{ mm}$, lungimea de 10 m , alimentat la 220 V ? Știm $\sigma_{\text{Stefan-Boltzmann}} = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$, emisivitatea 1, temperatura mediului 27°C . Dar dacă este bobinat spiră lângă spiră?
4. Sfera de rază $r=0,5 \text{ m}$ are temperatura $t=37^\circ\text{C}$. Temperatura mediului este $t_0=17^\circ\text{C}$. Știind constanta Stefan-Boltzmann $5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$, constanta Wien $2,9 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$ și emisivitatea suprafeței sferei 1, calculați:
 - a) lungimea de undă la care emisia radiației termice e maximă;
 - b) puterea radiată de sferă;
 - c) valoarea rezistenței electrice care alimentată la 220 V , menține temperatura sferei la 37°C ; curentul care circulă prin rezistență;
 - d) modificarea temperaturii unui senzor aflat la 10 m de sferă.
5. Un bec cu filament din wolfram are rezistența electrică $R_0=50 \Omega$ la 0°C , (rezistivitatea electrică $\rho=5 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ la 0°C , coeficientul de temperatură al rezistivității $\alpha=4 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$) și puterea de 88 W , alimentat la tensiunea $U=220 \text{ V}$. Aflați:

- a) curentul prin filament;
- b) rezistența electrică a filamentului când becul e "aprins";
- c) temperatura filamentului când becul este "aprins";
- d) lungimea firului de W cu diametrul $d=0,02$ mm;
- e) temperatura filamentului ($^{\circ}\text{C}$) dacă reducem puterea de 4 ori [perderi doar prin radiație $\varepsilon=1$, $\sigma_{\text{S-B}} = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$]

R.

a) $I=P/U = 88/220 = 0,4\text{A}$ b) $R=U/I = 220/0,4 = 550 \text{ Ohm}$

c) $R=R_0(1+\alpha t) \Rightarrow$

$t = (R/R_0 - 1)/\alpha = (550/50 - 1) / (4 \cdot 10^{-3}) = 2500^{\circ}\text{C}$

d) $L = R_0 \cdot S/\rho = 50 \cdot 3,14 \cdot (10^{-5})^2 / 5 \cdot 10^{-8} = 0,314\text{m}$

e) $P/4 = \varepsilon \sigma_{\text{S-B}} S T'^4 = \varepsilon \sigma_{\text{S-B}} S T^4 / 4 \Rightarrow$

$T'=T/(2)^{1/2} = 1961\text{K}=1688^{\circ}\text{C}$

6. Un bec cu filament simplu spiralat are lungimea firului $L=7.85$ cm, diametrul $d=0.1$ mm și rezistivitatea electrică $\rho_0=5 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$ la 0°C . Aplicând tensiunea $U=12\text{V}$, becul consumă $P=24\text{W}$. Considerând că pierderile sunt doar prin radiație termică ($\sigma_{\text{S-B}}=5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$, $\varepsilon=1$) aflați:

- a. rezistența electrică la 0°C ;
- b. curentul electric consumat când este alimentat cu 12V ;
- c. rezistența electrică când este alimentat cu 12V ;
- d. temperatura filamentului incandescent;
- e. coeficientul de temperatură al rezistivității electrice.

Rezolvare

a. $R_0=\rho_0 L/(\pi r^2)=0.5\Omega$

b. $I=P/U=2\text{A}$

c. $R=U/I=6\Omega$

d. $P=UI= 2\pi r L \cdot \varepsilon \sigma T^4/2 \Rightarrow T=[P/(\pi r L \varepsilon \sigma)]^{1/4}= 2421\text{K}= 2148^{\circ}\text{C}$

e. $\alpha=(R/R_0-1)/t=0.00512 \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$.